Sur la pression dans les milieux diélectriques ou magnétiques.

PAR P. DUHEM, *Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.*

INTRODUCTION.

Tous les physiciens connaissent la théorie des pressions dans les milieux polarisés qu'a imaginée Maxwell; perfectionnée par H. von Helmholtz, par G. Kirchhoff, par M. E. Lorberg, cette théorie ne peut éviter des difficultés et des contradictions qui ont été signalées par M. Beltrami, par E. Mathieu, par M. M. Brillonin.

Nous avons tenté, dans nos *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme*, de donner une théorie des pressions dans les milieux magnétiques ou diélectriques, distincte de celle que Maxwell a indiquée et exempte des difficultés que cette dernière présente; la méthode que nous avons suivie, fondée sur l'emploi du principe des vitesses virtuelles, paraît hors de contestation; malheureusement, une erreur s'est glissée dans nos calculs; en estimant la variation virtuelle du potentiel magnétique d'un système, nous avons négligé, comme infiniment petit du second ordre, une quantité qui était en réalité un infiniment petit du premier ordre; il résulte de cette erreur que les conditions d'équilibre qui se réfèrent aux divers points de la surface limite d'un milieu polarisé ont été données par nous d'une manière inexacte; au contraire, les conditions d'équilibre qui se réfèrent aux points situés à l'intérieur de la masse magnétique ou diélectrique ont été exactement données. La même erreur entache les conditions aux limites que nous avons établies en étudiant les solutions d'un sel magnétique.*

Cette erreur a été signalée par M. Liénard.† M. Liénard a donné une évaluation du terme négligé par nous; cette évaluation le conduit à une conséquence

---

* Sur les dissolutions d'un sel magnétique (Annales de l'Ecole Normale Sup^e. 3e série, t. VII, p. 289. 1890).

† Liénard. *Pressions à l'intérieur des aïmants et des diélectriques.* (La lumière électrique. Tome LII, p. 7 et p. 67, 1894.)

remarquable: pour maintenir en équilibre un fluide polarisé, il faut appliquer à chacun des éléments de la surface qui le limite une pression dont la direction est normale à l'élément, mais *dont la grandeur dépend de l'orientation de l'élément;* la grandeur de cette pression en un point de l'élément est $2\pi\varepsilon M^2 \cos^2(M, N_i)$, ε étant la constante des lois de Coulomb et M l'intensité de polarisation.

Lorsque le corps est assez faiblement polarisé pour que l'on puisse négliger son potentiel sur lui même, cette pression introduite par M. Liénard devient proportionnelle au carré de l'intensité du champ et *au carré du coefficient de polarisation* du corps; au contraire, tous les autres termes que la polarisation conduit à introduire dans l'étude des pressions sont proportionnels au carré de l'intensité du champ et *à la première puissance du coefficient de polarisation;* le terme complémentaire introduit par M. Liénard peut donc être négligé lorsque l'on considère des corps faiblement diélectriques ou faiblement magnétiques; pour de tels corps, la théorie que nous avons donnée subsiste en entier. Au contraire, pour les corps fortement magnétiques tels que le fer doux, le terme complémentaire a une grande valeur.

Les belles recherches de M. Liénard nous ont amené à reprendre, à notre tour, l'étude des pressions dans les milieux polarisés; cette étude repose, comme du reste la mise en équation de tous les problèmes relatifs aux corps magnétiques ou diélectriques, sur l'expression de la variation infiniment petite qu'éprouve le potentiel d'un système polarisé sur lui même, lorsque ce système éprouve une modification infiniment petite; cette expression, qui était incomplète dans nos *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme*, nous avons cherché à l'établir avec rigueur.

La méthode qui sert à traiter avec précision les questions relatives à la fonction potentiel ou au potentiel d'un *système polarisé*, où A, B, C, sont les composantes de la polarisation au point (x, y, z), est bien connue; elle consiste à ramener, au moyen d'intégrations par parties, la question proposée à une question analogue relative à un *système électrisé*, portant, en chaque point de sa masse, une densité électrique solide,

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) \tag{1}$$

et, en chaque point de sa surface, une densité électrique superficielle,

$$\sigma = -\left[A\cos(N_i, x) + B\cos(N_i, y) + C\cos(N_i, z)\right]. \tag{2}$$

Cette méthode ramène la question que nous nous étions proposée à celle-ci:

trouver l'expression de la variation infiniment petite qu'éprouve le potentiel électrostatique d'un système lorsque la forme, la position et l'électrisation de ce système éprouvent des modifications infiniment petites. Ce dernier problème peut, d'ailleurs, être regardé comme le problème fondamental de l'électrostatique; il serait donc désirable que la solution en soit donnée avec la rigueur que Gauss, Bouquet et M. O. Holder ont apporté dans les démonstrations relatives à la fonction potentielle; cette solution, qui n'avait jamais été donnée à notre connaissance, est l'objet du Chapître I du présent Mémoire.

Au Chapître II, nous avons montré brièvement comment on pouvait déduire de la formule trouvée quelques unes des lois fondamentales de l'Electrostatique.

Repasser, au moyen des formules (1) et (2), de l'expression de la variation infiniment petite d'un potentiel électrostatique à l'expression de la variation du potentiel d'un système polarisé sur lui même, c'est l'objet du Chapître III.

Au Chapître IV, nous faisons usage des résultats obtenus pour traiter le problème de l'équilibre d'un fluide incompressible doué de force coercitive; dans nos *Leçons sur l'Electricité et la Magnétisme*, nous avions déjà obtenu les conditions de cet équilibre; mais l'une de ces conditions était faussée par l'omission du terme complémentaire introduit par M. Liénard, et la démonstration des autres laissait à désirer au point de vue de la rigueur.

Enfin, au Chapître V, nous établissons les conditions générales de l'équilibre d'un fluide compressible dénué de force coercitive.

Dans les deux premiers Chapîtres de ce Mémoire, nous avons évité d'examiner le cas où la surface de contact de deux corps porte une *couche électrique double;* l'étude des couches électriques doubles présente des difficultés spéciales que nous examinerons dans un travail spécial.

Dans les deux derniers Chapîtres, nous avons borné notre exposé aux fluides polarisés; l'équilibre des solides élastiques polarisés se traitera sans peine en suivant les méthodes indiquées dans nos *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme* et en corrigeant, au moyen des calculs donnés ici, la forme des conditions aux limites.

Nous n'avons pas repris, non plus, l'étude de l'influence que le magnétisme exerce sur une dissolution d'un sel magnétique dans un liquide non magnétique; le lecteur trouvera sans peine de quelle manière les conditions aux limites doivent être corrigées par l'introduction du terme complémentaire de M. Liénard; dans le cas, seul réalisable pratiquement, où le sel est peu magnétique, ce terme

est négligeable ; dans ce cas, les résultats que nous avons donnés autrefois deviennent tous exacts.

CHAPÎTRE I.

Variation du Potentiel électrostatique d'un Système.

Considérons un système électrisé portant à la fois une distribution électrique solide à l'intérieur des masses continues qui le forment et une distribution superficielle sur les surfaces de discontinuité qui limitent ces masses ; nous laisserons de côté, dans le présent travail, le cas où ces surfaces porteraient une *couche électrique double ;* nous nous proposons de consacrer à ce cas un mémoire spécial.

Soient : M_1 un point situé à l'intérieur de l'une des masses continues qui forment le système :

dv_1, un élément de volume entourant le point M_1 ;
ρ_1, la densité électrique solide au point M_1 ;
μ_1, un point situé sur une surface de discontinuité;
dS_1, une aire élémentaire découpée sur cette surface, autour du point μ_1 ;
σ_1, la densité électrique superficielle au point μ_1.

Au point $M(x, y, z)$, la distribution électrique solide aura pour fonction potentielle,

$$U(M) = U(x, y, z) = \int \frac{\rho_1}{r_1} dv_1, \tag{1}$$

r_1 étant la distance $\overline{MM_1}$ et l'intégrale s'étendant à tout espace rempli par une masse continue électrisée.

Au point $M(x, y, z)$, la distribution électrique superficielle aura pour fonction potentielle,

$$W(M) = W(x, y, z) = \mathrm{S} \frac{\sigma_1}{r_1} dS_1, \tag{2}$$

r_1 désignant la distance $\overline{M\mu_1}$ et l'intégrale s'étendant à toutes les surfaces de discontinuité électrisées.

La fonction potentielle totale aura pour valeur, au point $M(x, y, z)$,

$$\begin{aligned} V(x, y, z) = V(M) &= U(M) + W(M) \\ &= \int \frac{\rho_1}{r_1} dv_1 + \mathrm{S} \frac{\sigma_1}{r_1} dS_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Le Potentiel électrostatique du système a pour valeur,

$$Y = \frac{\varepsilon}{2}\int \rho U dv + \varepsilon \mathop{\mathrm{S}} \sigma U dS + \frac{\varepsilon}{2} \mathop{\mathrm{S}} \sigma W dS, \tag{4}$$

ε étant la constante fondamentale de l'électrostatique.

Il est la somme de trois termes:

1°. Le Potentiel de la distribution solide sur elle même: $\frac{\varepsilon}{2}\int \rho U dv$;

2°. Le Potentiel de la distribution solide sur la distribution superficielle: $\varepsilon \mathop{\mathrm{S}} \sigma U dS$;

3°. Le Potentiel de la distribution superficielle sur elle même: $\frac{\varepsilon}{2} \mathop{\mathrm{S}} \sigma W dS$.

Prenons maintenant deux états du système infiniment voisins l'un de l'autre.

Entre chaque point *géométrique* M du système dans le premier état et chaque point *géométrique* M' dans le second état, établissons une correspondance univoque assujettie aux conditions suivantes:

1°. Deux points correspondants M, M', sont toujours infiniment voisins l'un de l'autre.

2°. A tout volume v du premier système, tout entier compris à l'intérieur d'une même masse continue, correspond un volume v' du second système, tout entier compris à l'intérieur d'une même masse continue, et réciproquement.

3°. A toute aire S du premier système, tout entière tracée sur une même surface de discontinuité, correspond une aire S' du second système, tout entière tracée sur une même surface de discontinuité, et réciproquement.

(Ces deux conditions excluent la possibilité de toute scission, de toute déchirure, durant la déformation.)

4°. En tout point d'un volume tel que v, la déformation fait naître des dilatations et des glissements qui sont infiniment petits.

5°. En tout point d'une aire telle que S, qui se transforme en sa correspondante S', les déformations sont infiniment petites.

6°. Les densités électriques solides ρ, ρ', en deux points correspondants M, M', diffèrent infiniment peu l'une de l'autre.

7°. Les densités électriques superficielles σ, σ', en deux points correspondants μ, μ', diffèrent infiniment peu l'une de l'autre.*

* Dans un grand nombre de cas, les hypothèses précédentes seront vérifiées, si l'on fait correspondre entre eux les deux points *géométriques* M, M', positions initiale et finale d'un même point *matériel;* on pourra alors, si on le juge utile, adopter ce mode de correspondance, mais on ne sera jamais tenu de la faire; on pourra toujours, si l'on y trouve avantage, en établir un autre.

Soient Y la valeur du potentiel électrostatique du système dans le premier état et Y' la valeur du potentiel électrostatique du système dans le second état. Nous allons chercher à calculer l'infiniment petit principal de la différence $(Y' - Y)$, infiniment petit principal que nous désignerons par δY.

1°. *Calcul du terme principal de* $[U'(M') - U(M)]$.

En un point M du système, pris dans le premier état, la distribution électrique solide que porte le système dans cet état admet une fonction potentielle $U(M)$; au point correspondant M' du système pris dans le second état, la distribution électrique solide que porte le système dans cet état admet une fonction potentielle $U'(M')$. *La différence* $[U'(M') - U(M)]$ *est infiniment petite;* cette proposition est évidente lorsque le point M et, par conséquent, le point M', sont extérieurs aux masses électrisées; une démonstration est nécessaire dans le cas où le point M, et, partant, le point M', appartiennent à une masse électrisée.

Soit P la limite supérieure des valeurs absolues que peut prendre la densité électrique solide ρ en un point quelconque du système et en l'un quelconque des états compris dans l'ensemble d'états que l'on veut considérer.

Soit m un point quelconque du système en l'un de ses états. Du point m comme centre, décrivons une sphère Σ de rayon R; la fonction potentielle au point m de la distribution électrique solide répandue à l'intérieur de cette sphère sera inférieure, en valeur absolue, à $2\pi PR^2$. On peut donc prendre R assez petit pour que cette fonction potentielle soit inférieure en valeur absolue à une quantité donnée d'avance η. R étant ainsi déterminé, prenons le second état du système assez voisin du premier pour que $\overline{MM'}$ soit inférieur à R. Posons:

$$U(M) = u(M) + \mathfrak{U}(M),$$

$u(M)$ étant, au point M, la fonction potentielle de la distribution solide que renferme, dans le premier état du système, une sphère de rayon R ayant le point M pour centre et $\mathfrak{U}(M)$ étant la fonction potentielle de la distribution solide qui demeure extérieure à cette sphère. Posons de même

$$U'(M') = u'(M') + \mathfrak{U}'(M'),$$

$u'(M')$ étant, au point M', la fonction potentielle de la distribution solide que renferme, dans le second état du système, une sphère de rayon R ayant le point M' pour centre et $\mathfrak{U}'(M')$ étant la fonction potentielle de la distribution superficielle qui demeure extérieure à cette sphère. Nous aurons sûrement

$$|u(M)| < \eta, \quad |u'(M')| < \eta.$$

D'autre part, le point M est intérieur à la sphère de rayon R ayant le point M' pour centre et le point M' est intérieur à la sphère de rayon R ayant le point M pour centre ; il est alors évident que $\mathfrak{U}'(M')$ tend d'une manière continue vers $\mathfrak{U}(M)$, lorsque le second état du système tend vers le premier ; on peut par conséquent prendre le second état assez voisin du premier pour que l'on ait

$$|\mathfrak{U}'(M') - \mathfrak{U}(M)| < \eta.$$

On aura, alors

$$|U'(M') - U(M)| < 3\eta.$$

On peut donc prendre le second état du système assez voisin du premier pour que la différence $[U'(M') - U(M)]$ soit inférieure en valeur absolue à une quantité donnée d'avance ; cette différence est donc infiniment petite, comme nous l'avions annoncé.

Nous sommes assurés que la différence $[U'(M') - U(M)]$ peut être regardée comme un infiniment petit du premier ordre ; nous allons maintenant évaluer le terme principal de cette quantité.

Nous avons

$$U'(M') - U(M) = \int \frac{\rho_1'}{M'M_1'} dv_1' - \int \frac{\rho_1}{MM_1} dv_1,$$

la seconde intégrale s'étendant à tous les éléments dv_1 du premier état, et la première à tous les éléments *correspondants* dv_1' du second état.

Nous pouvons exprimer cette différence au moyen d'intégrales toutes étendues aux éléments dv_1 du premier état, et écrire :

$$\begin{aligned} U'(M') - U(M) = & \int \frac{\rho_1' - \rho_1}{MM_1} dv_1 \\ & + \int \rho_1 \left(\frac{1}{M'M_1'} - \frac{1}{MM_1} \right) dv_1 \\ & + \int \frac{\rho_1}{MM_1} \frac{dv_1' - dv_1}{dv_1} dv_1 + K, \end{aligned} \tag{5}$$

avec

$$\begin{aligned} K = & \int \left(\frac{\rho_1'}{M'M_1'} - \frac{\rho_1}{MM_1} \right) \frac{dv_1' - dv_1}{dv_1} dv_1 \\ & + \int (\rho_1' - \rho_1) \left(\frac{1}{M'M_1'} - \frac{1}{MM_1} \right) dv_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Posons

$$\lambda_1 = \lambda(M_1) = \frac{dv_1'}{dv_1}; \tag{7}$$

$\lambda(M_1)$ sera, d'après nos conventions, une fonction du point M_1, qui gardera, pour tous les points M_1, une valeur infiniment voisine de 1.

Nos conventions nous permettent également d'écrire

$$\frac{dv_1' - dv_1}{dv_1} = \theta\varpi(M_1) = \theta\varpi_1, \tag{8}$$

$$\rho_1' - \rho_1 = \vartheta p(M_1) = \vartheta p_1, \tag{9}$$

θ et ϑ étant deux facteurs infiniment petits indépendants du point M_1, tandis que $\varpi(M_1)$ et $p(M_1)$ sont deux fonctions finies du point M_1.

Nous pouvons alors écrire l'égalité (6) sous la forme

$$\begin{aligned} K = \theta\left(\int \frac{\lambda_1\varpi_1\rho_1'}{\overline{M'M_1'}}\,dv_1' - \int\frac{\varpi_1\rho_1}{\overline{MM_1}}\,dv_1\right) \\ + \vartheta\left(\int\frac{\lambda_1 p_1}{\overline{M'M_1'}}\,dv_1' - \int\frac{p_1}{\overline{MM_1}}\,dv_1\right). \end{aligned} \tag{10}$$

La différence

$$\int \frac{\lambda_1\varpi_1\rho_1'}{\overline{M'M_1'}}\,dv_1' - \int\frac{\varpi_1\rho_1}{\overline{MM_1}}\,dv_1$$

est ce que deviendrait la différence $[U'(M') - U(M)]$ si, au point M_1 du système pris dans le premier état, la densité électrique solide avait la valeur finie $\varpi_1\rho_1$ et si, au point correspondant M_1' du système pris dans le second état, la densité électrique solide avait la valeur, infiniment voisine de la précédente, $\lambda_1\varpi_1\rho_1$; dès lors, nous savons que cette différence est infiniment petite.

La différence

$$\int\frac{\lambda_1 p_1}{\overline{M'M_1'}}\,dv_1' - \int\frac{p_1}{\overline{MM_1}}\,dv_1$$

est ce que deviendrait la différence $[U'(M') - U(M)]$, si, au point M_1 du système pris dans le premier état, la densité électrique solide avait la valeur finie p_1 et si, au point correspondant M_1' du système pris dans le second état, la densité électrique solide avait la valeur, infiniment voisine de la précédente, $\lambda_1 p_1$; dès lors, nous savons que cette différence est infiniment petite.

Comme ϑ et θ sont deux facteurs infiniment petits, l'égalité (10) nous apprend que *K est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier.*

Le terme principal de $[U'(M') - U(M)]$ est donc formé par l'ensemble des termes explicitement écrits au second membre de l'égalité (5).

2°. *Variation du potentiel de la distribution électrique solide sur elle-même.*

Nous aurons

$$\delta\int U\rho dv = \int U'\rho' dv' - \int U\rho dv$$
$$= \int (U' - U)\rho dv$$
$$+ \int (\rho' - \rho) U dv$$
$$+ \int \rho U \frac{dv' - dv}{dv} dv + H, \tag{11}$$

avec

$$H = \int (U' - U)(\rho' dv' - \rho dv) + \int U(\rho' - \rho)\frac{dv' - dv}{dv} dv. \tag{12}$$

En vertu des égalités (8) et (9), nous pourrons écrire

$$H = \theta\int (U' - U)\varpi\rho dv + \vartheta\int (U' - U) y dv$$
$$+ \theta\vartheta\int U' p\varpi dv. \tag{13}$$

La différence

$$U' - U = U'(M) - U(M)$$

étant infiniment petite, ainsi que les deux facteurs θ et ϑ, cette égalité (13) montre que *tous les termes qui composent la quantité H sont infiniment petits d'ordre supérieur au premier.* Le terme principal de $\delta\int U\rho dv$ est donc représenté par l'ensemble des termes explicitement écrits au second membre de l'égalité (11). On peut d'ailleurs, dans le premier de ces termes, remplacer la différence $(U' - U)$ par son infiniment petit principal, c'est-à-dire par l'ensemble des termes explicitement écrits au second membre de l'égalité (5). On obtient ainsi l'égalité suivante :

$$\delta\int U\rho dv = \int (\rho' - \rho) U dv$$
$$+ \int\int \frac{\rho_1' - \rho_1}{MM_1} \rho dv_1 dv$$
$$+ \int\int \rho_1 \left(\frac{1}{M'M_1'} - \frac{1}{MM_1}\right) \rho dv_1 dv$$
$$+ \int\int \frac{\rho_1}{MM_1} \frac{dv_1' - dv_1}{dv_1} \rho dv_1 dv$$
$$+ \int \rho U \frac{dv' - dv}{dv} dv. \tag{14}$$

Transformons cette égalité (14).

Plaçons, au point M_1, une densité électrique solide $R_1 = \rho_1' - \rho_1$; soit

$$\mathfrak{u}(M) = \int \frac{R_1}{\overline{MM_1}} dv_1$$

la valeur, au point M, de la distribution ainsi obtenue. Une identité bien connue, due à Gauss, nous donnera

$$\int \mathfrak{u}\rho dv = \int URdv,$$

ou bien

$$\int\int \frac{\rho_1' - \rho_1}{\overline{MM_1}} \rho dv_1 dv = \int (\rho' - \rho)\, Udv. \tag{15}$$

Nous aurons identiquement

$$\begin{aligned} \int\int \frac{\rho_1}{\overline{MM_1}} \frac{dv_1' - dv_1}{dv_1} \rho dv_1\, dv &= \int\int \frac{\rho}{\overline{M_1M}} \frac{dv_1' - dv_1}{dv_1} \rho_1 dv\, dv_1 \\ &= \int \rho_1 U_1 \frac{dv_1' - dv_1}{dv_1} dv_1 \\ &= \int \rho U \frac{dv' - dv}{dv} dv. \end{aligned} \tag{16}$$

Enfin nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int\int \rho\rho_1 \left(\frac{1}{\overline{M'M_1'}} - \frac{1}{\overline{MM_1}}\right) dv\, dv_1 &= -\int\int \frac{\overline{M'M_1'}^2 - \overline{MM_1}^2}{\overline{MM_1}.\overline{M'M_1'}(\overline{MM_1} + \overline{M'M_1'})} \rho\rho_1 dv\, dv_1 \\ = -\int\int \frac{(x_1'-x')^2+(y_1'-y')^2+(z_1'-z')^2-(x_1-x)^2-(y_1-y)^2-(z_1-z)^2}{\overline{MM_1}.\overline{M'M_1'}(\overline{MM_1} + \overline{M'M_1'})} \rho\rho_1 dv\, dv_1. \end{aligned} \tag{17}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} &\int\int \frac{(x_1' - x')^2 - (x_1 - x)^2}{\overline{MM_1}.\overline{M'M_1'}(\overline{MM_1} + \overline{M'M_1'})} \rho\rho_1 dv\, dv_1 \\ &= \int\int \frac{[(x_1' - x_1) - (x' - x)](x_1' - x' + x_1 - x)}{\overline{MM_1}.\overline{M'M_1'}(\overline{MM_1} + \overline{M'M_1'})} \rho\rho_1 dv\, dv_1 \\ &= \int \rho_1 (x_1' - x_1) \left[\int \frac{x_1' - x' + x_1 - x}{\overline{MM_1}.\overline{M'M_1'}(\overline{MM_1} + \overline{M'M_1'})} \rho dv\right] dv_1. \\ &+ \int \rho (x' - x) \left[\int \frac{x' - x_1' + x - x_1}{\overline{M_1M}.\overline{M_1'M'}(\overline{M_1M} + \overline{M_1'M'})} \rho_1 dv_1\right] dv \\ &= 2\int \rho (x' - x) \left[\int \frac{x' - x_1' + x - x_1}{\overline{MM_1}.\overline{M'M_1'} + (\overline{MM_1} + \overline{M'M_1'})} \rho_1 dv_1\right] dv. \end{aligned} \tag{18}$$

Mais il résulte des hypothèses faites que les rapports $\frac{x' - x_1'}{x - x_1}$, $\frac{\overline{M'M_1'}}{\overline{MM_1}}$, diffèrent

infiniment peu de 1, même lorsque $(x - x_1)$ et $\overline{MM_1}$ sont infiniment petits; on peut donc écrire

$$\int \frac{x' - x'_1 + x - x_1}{\overline{MM_1}.\overline{M'M'_1}(\overline{MM_1} + \overline{M'M'_1})} \rho_1 dv_1$$
$$= \int \frac{x - x_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1 + \int K \frac{x - x_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1, \tag{19}$$

K étant infiniment petit. Au second membre de cette égalité (19), le premier terme est évidemment fini et le second infiniment petit. Cette égalité, jointe à l'égalité (18), montre alors qu'en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, on peut écrire la première des égalités

$$\left.\begin{aligned}
\int\int \frac{(x'_1 - x')^2 - (x_1 - x)^2}{\overline{MM_1}.\overline{M'M'_1}(\overline{MM_1} + \overline{M'M'_1})} \rho\rho_1 dv\, dv_1 &= 2\int \rho\,(x' - x)\left(\int \frac{x - x_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1\right) dv,\\
\int\int \frac{(y'_1 - y')^2 - (y_1 - y)^2}{\overline{MM_1}.\overline{M'M'_1}(\overline{MM_1} + \overline{M'M'_1})} \rho\rho_1 dv\, dv_1 &= 2\int \rho\,(y' - y)\left(\int \frac{y - y_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1\right) dv,\\
\int\int \frac{(z'_1 - z')^2 - (z_1 - z)^2}{\overline{MM_1}.\overline{M'M'_1}(\overline{MM_1} + \overline{M'M'_1})} \rho\rho_1 dv\, dv_1 &= 2\int \rho\,(z' - z)\left(\int \frac{z - z_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1\right) dv;
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

les deux autres s'établisent d'une manière analogue.

Posons

$$\left.\begin{aligned}
\xi(x, y, z) = \xi(M) &= \varepsilon \int \frac{x - x_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1,\\
\eta(x, y, z) = \eta(M) &= \varepsilon \int \frac{y - y_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1,\\
\zeta(x, y, z) = \zeta(M) &= \varepsilon \int \frac{z - z_1}{\overline{MM_1}^3} \rho_1 dv_1
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

et les égalités (17) et (20) nous permettront d'écrire, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\varepsilon \int\int \rho\rho_1 \left(\frac{1}{\overline{M'M'_1}} - \frac{1}{\overline{MM_1}}\right) dv\, dv_1 = -2\int \rho\,[\xi(x' - x) + \eta(y' - y) + \zeta(z' - z)]\, dv. \tag{22}$$

Les égalités (14), (15), (16) et (22) donnent, en dernière analyse,

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{2}\,\delta \int U\rho dv = {} & \varepsilon \int (\rho' - \rho)\, U dv\\
& + \varepsilon \int \rho\, U \frac{dv' - dv}{dv}\, dv\\
& - \int \rho\,[\xi(x' - x) + \eta(y' - y) + \zeta(z' - z)]\, dv.
\end{aligned} \tag{23}$$

Nous avons eu soin, au cours des raisonnements qu'on vient de lire, d'invoquer seulement des propriétés communes aux distributions électriques solides et aux distributions électriques superficielles; nous pourrons alors nous abstenir de développer de nouveau ces raisonnements dans les deux cas qui nous restent à traiter.

3°. *Variation du potentiel de la distribution solide sur la distribution superficielle.*

En posant

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) &= \varepsilon \mathbf{S} \frac{x - x_1}{\overline{M\mu_1}^3} \sigma_1 dS_1, \\ \mathfrak{Y}(M) &= \varepsilon \mathbf{S} \frac{y - y_1}{\overline{M\mu_1}^3} \sigma_1 dS_1, \\ \mathfrak{Z}(M) &= \varepsilon \mathbf{S} \frac{z - z_1}{\overline{M\mu_1}^3} \sigma_1 dS_1, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

nous trouverons pour expression de la variation de la distribution solide sur la distribution superficielle :

$$\begin{aligned} \varepsilon\delta \mathbf{S} \sigma U dS = \varepsilon & \mathbf{S} (\sigma' - \sigma) U dS \\ & + \varepsilon \int (\rho' - \rho) W dv \\ & + \varepsilon \mathbf{S} U\sigma \frac{dS' - dS}{dS} dS \\ & + \varepsilon \int W\rho \frac{dv' - dv}{dv} dv \\ & - \mathbf{S} \sigma [\xi (x' - x) + \eta (y' - y) + \zeta (z' - z)] dS \\ & - \int \rho [\mathfrak{X} (x' - x) + \mathfrak{Y} (y' - y) + \mathfrak{Z} (z' - z)] dv. \end{aligned} \tag{25}$$

4°. *Variation du potentiel de la distribution superficielle sur elle même.*

Nous aurons de même

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \delta \mathbf{S} \sigma W dS = \varepsilon & \mathbf{S} (\sigma' - \sigma) W dS \\ & + \varepsilon \mathbf{S} W\sigma \frac{dS' - dS}{dS} dS \\ & - \mathbf{S} \sigma [\mathfrak{X} (x' - x) + \mathfrak{Y} (y' - y) + \mathfrak{Z} (z' - z)] dS. \end{aligned} \tag{26}$$

5°. *Variation du potentiel électrostatique d'un système.*

Posons

$$\left.\begin{aligned}
X(M) &= \xi(M) + \mathfrak{X}(M) = \varepsilon \int \frac{x - x_1}{\overline{MM_1}^3}\, \rho_1 dv_1 + \varepsilon \mathop{\mathbf{S}} \frac{x - x_1}{\overline{M\mu_1}^3}\, \sigma_1 dS_1, \\
Y(M) &= \eta(M) + \mathfrak{Y}(M) = \varepsilon \int \frac{y - y_1}{\overline{MM_1}^3}\, \rho_1 dv_1 + \varepsilon \mathop{\mathbf{S}} \frac{y - y_1}{\overline{M\mu_1}^3}\, \sigma_1 dS_1, \\
Z(M) &= \zeta(M) + \mathfrak{Z}(M) = \varepsilon \int \frac{z - z_1}{\overline{MM_1}^3}\, \rho_1 dv_1 + \varepsilon \mathop{\mathbf{S}} \frac{z - z_1}{\overline{M\mu_1}^3}\, \sigma_1 dS_1 .
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Posons, en outre,

$$\rho' - \rho = \delta\rho, \quad x' - x = \delta x, \quad y' - y = \delta y, \quad z' - z = \delta z.$$

Une formule connue nous donnera

$$\frac{dv' - dv}{dv} = \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}.$$

Les égalitées (4), (23), (25) et (26) nous donneront l'expression suivante pour la variation du potentiel électrostatique d'un système

$$\begin{aligned}
\delta Y = {} & \varepsilon \int V \delta\rho\, dv + \varepsilon \mathop{\mathbf{S}} V \delta\sigma\, dS \\
& - \int \rho\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dv - \mathop{\mathbf{S}} \sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dS \\
& + \varepsilon \int V\rho \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right) dv + \varepsilon \mathop{\mathbf{S}} V\sigma \frac{dS' - dS}{dS}\, dS.
\end{aligned} \tag{28}$$

Dans certains cas, il y a avantage à transformer cette égalité au moyen de relations que nous allons écrire.

En tout point *intérieur* à une masse continue électrisée, on a

$$X = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial z}. \tag{29}$$

Ces égalités perdent tout sens en un point pris sur une surface de discontinuité électrisée.

Soient 1 et 2 les deux régions de l'espace qui sont situées de part et d'autre de la surface S; soient N_1 la demi-normale menée vers l'intérieur de la région 1 et N_2 la demi-normale menée vers l'intérieur de la région 2. La surface S est une surface de discontinuité pour les dérivées partielles du premier ordre de la fonction potentielle. Si M est le point de la surface S auquel se rapportent les

quantités X, Y, Z; si $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ sont deux points infiniment voisins du point M et situés le premier dans la région 1, le second dans la région 2, on a

$$\left.\begin{aligned} X &= -\varepsilon\left[\frac{\partial V}{\partial x_1} + 2\pi\sigma\cos(N_1, x)\right] = -\varepsilon\left[\frac{\partial V}{\partial x_2} + 2\pi\sigma\cos(N_2, x)\right], \\ Y &= -\varepsilon\left[\frac{\partial V}{\partial y_1} + 2\pi\sigma\cos(N_1, y)\right] = -\varepsilon\left[\frac{\partial V}{\partial y_2} + 2\pi\sigma\cos(N_2, y)\right], \\ Z &= -\varepsilon\left[\frac{\partial V}{\partial z_1} + 2\pi\sigma\cos(N_1, z)\right] = -\varepsilon\left[\frac{\partial V}{\partial z_2} + 2\pi\sigma\cos(N_2, z)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Les identités

$$\cos(N_1, x) + \cos(N_2, x) = 0,$$
$$\cos(N_1, y) + \cos(N_2, y) = 0,$$
$$\cos(N_1, z) + \cos(N_2, z) = 0,$$

permettent de transformer les égalités (30) en

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\right), \\ Y &= -\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial y_1} + \frac{\partial V}{\partial y_2}\right), \\ Z &= -\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial z_1} + \frac{\partial V}{\partial z_2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

De ces égalités (30) et (31) nous pouvons encore déduire les égalités

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2} &= -4\pi\sigma\cos(N_1, x), \\ \frac{\partial V}{\partial y_1} - \frac{\partial V}{\partial y_2} &= -4\pi\sigma\cos(N_1, y), \\ \frac{\partial V}{\partial z_1} - \frac{\partial V}{\partial z_2} &= -4\pi\sigma\cos(N_1, z). \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Ces diverses formules nous seront utiles par la suite.

CHAPÎTRE II.

Application de la Formule précédente à quelques Questions d'Électrostatique.

§1.— *Conditions de l'équilibre électrique.*

Le potentiel thermodynamique interne d'un système électrisé a pour expression

$$F = F_0 + \int \Theta\rho\, dv + \mathsf{S}\, \Theta\rho\, dS + Y, \tag{1}$$

Θ étant une quantité qui, sur un conducteur, varie d'un point à l'autre et F_0 la valeur que prendrait le potentiel thermodynamique interne du système ramené à l'état neutre.

Comme nous ne voulons pas, dans le présent mémoire, introduire la considération de couches électriques doubles, nous nous limiterons au cas où Θ *varie d'une manière continue d'un point à l'autre de toute masse conductrice connexe.*

Supposons que le conducteur se compose de deux masses conductrices séparément connexes, 1 et 2, limitées respectivement par les surfaces S_1, S_2. Imposons à ce système une variation de distribution électrique, sans changement de position ni de forme des corps conducteurs qui le constituent. Faisons correspondre les deux points *géométriques* M, M', où un même point *matériel* se trouve au début et à la fin de la modification; les deux points M et M' coïncideront. En vertu de l'égalité (28) du Chapître I et de l'égalité (1), nous aurons

$$\delta F = \int (\varepsilon V + \Theta)\, \delta\rho_1\, dv_1 + \mathbf{S} (\varepsilon V + \Theta)\, \delta\sigma_1\, dS_1$$
$$+ \int (\varepsilon V + \Theta)\, \delta\rho_2\, dv_2 + \mathbf{S} (\varepsilon V + \Theta)\, \delta\sigma_2\, dS_2.$$

Les conditions d'équilibre s'obtiendront en exprimant que δF est égal à 0 pour toutes les variations virtuelles de la distribution électrique.

Si l'on désigne par Q_1 et Q_2 les charges *invariables* des corps 1 et 2, on aura

$$\int \rho_1\, dv_1 + \mathbf{S}\, \sigma_1\, dS_1 = Q_1,$$
$$\int \rho_2\, dv_2 + \mathbf{S}\, \sigma_2\, dS_2 = Q_2,$$

en sorte que les variations virtuelles de la distribution électrique seront assujetties aux conditions

$$\int \delta\rho_1\, dv_1 + \mathbf{S}\, \delta\sigma_1\, dS_1 = 0,$$
$$\int \delta\rho_2\, dv_2 + \mathbf{S}\, \delta\sigma_2\, dS_2 = 0.$$

C'est seulement lorsque ces conditions sont remplies que δF doit être égal à 0. Il doit donc exister deux constantes C_1, C_2, telles que l'on ait *identiquement*

$$\int (\varepsilon V + \Theta + C_1)\, \delta\rho_1\, dv_1 + \mathbf{S} (\varepsilon V + \Theta + C_1)\, \delta\sigma_1\, dS_1$$
$$+ \int (\varepsilon V + \Theta + C_2)\, \delta\rho_2\, dv_2 + \mathbf{S} (\varepsilon V + \Theta + C_2)\, \delta\sigma_2\, dS_2 = 0.$$

Pour que cette identité ait lieu, il faut et il suffit que l'on ait:

1°. En tout point du corps 1 ou de la surface qui le limite,

$$\varepsilon V + \Theta + C_1 = 0. \tag{2}$$

2°. En tout point du corps 2 ou de la surface qui le limite,

$$\varepsilon V + \Theta + C_2 = 0. \tag{2 bis}$$

On obtient ainsi, par une méthode entièrement rigoureuse, les équations connues de l'équilibre électrique.

§2.—*Actions qui s'exercent entre des corps dont la forme et l'électrisation demeurent invariables.*

Imaginons un système formés de corps qui se déplacent de manière que chacun d'eux garde une figure invariable et que chaque point matériel entraîne la charge qu'il porte; tel est un système formé de solides parfaitement rigides et parfaitement mauvais conducteurs.

Prenons deux états voisins du système; à chaque point géométrique M du premier état faisons correspondre un point géométrique M' du second état, de telle sorte qu'un même point matériel se trouve en M au début de la modification et en M' à la fin; δx, δy, δz, sont alors, en chaque point géométrique, les composantes du déplacement subi par le point matériel qui se trouvait en ce point géométrique.

Les hypothèses faites nous donnent les égalités

$$\delta\rho = 0, \quad \delta\sigma = 0, \quad dv' - dv = 0, \quad dS' - dS = 0.$$

L'égalité (28) du Chapître I et l'égalité (1) donnent

$$\begin{aligned} \delta F = \delta F_0 - \int \rho\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dv \\ - \mathop{\mathrm{S}} \sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dS. \end{aligned}$$

Cette égalité nous montre que chaque élément matériel est soumis:

1°. Aux forces auxquelles il resterait soumis si le système était ramené à l'état neutre.

2°. A une force qui a pour composantes Xq, Yq, Zq, si l'on désigne par q la charge électrique totale de l'élément matériel considéré.

On retrouve ainsi, sous leur forme la plus générale, les lois de Coulomb, point de départ de l'électrostatique.

§3.—*Actions qui s'exercent sur des corps conducteurs électrisés.*

Nous supposerons, comme au §1, que d'un point à l'autre de toute masse conductrice connexe la quantité Θ varie d'une manière continue; de plus, pour simplifier nos recherches, nous supposerons que chaque masse conductrice demeure homogène même au voisinage des surfaces terminales; nous admettrons que Θ garde la même valeur en tout point de la masse conductrice, même au voisinage des surfaces terminales; nous regarderons cette valeur de Θ comme fonction de la seule densité D de la matière conductrice, *et nous supposerons cette densité invariable.*

Pour éviter les formules trop longues, nous réduirons le système à un conducteur unique.

Enfin nous établirons la correspondance entre les points M, M', en suivant la règle qui nous a servi au § précédent.

Nous trouverons sans peine l'égalité

$$\delta \int \Theta\rho dv + \delta \mathop{\mathsf{S}} \Theta\sigma dS = \int \Theta\delta\rho dv + \mathop{\mathsf{S}} \Theta\delta\sigma\, dS$$
$$+ \int \Theta\rho \frac{dv' - dv}{dv} dv + \mathop{\mathsf{S}} \Theta\sigma \frac{dS' - dS}{dS} dS. \qquad (3)$$

D'autre part, les égalités (28), (29) et (30) du Chapître I donnent l'égalité

$$\begin{aligned} \delta Y = & \int \varepsilon V \delta\rho\, dv + \mathop{\mathsf{S}} \varepsilon V \delta\sigma\, dS \\ & + \int \varepsilon V\rho \frac{dv' - dv}{dv} dv + \mathop{\mathsf{S}} \varepsilon V\sigma \frac{dS' - dS}{dS} dS \\ & + \int \varepsilon\rho \left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) dv \\ & + \mathop{\mathsf{S}} \varepsilon\sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z\right) dS \\ & + \mathop{\mathsf{S}} 2\pi\varepsilon\sigma^2 [\cos(N_i, x)\,\delta x + \cos(N_i, y)\,\delta y + \cos(N_i, z)\,\delta z]\, dS, \end{aligned} \qquad (4)$$

N_i désignant la demi-normale à la surface limite du conducteur, dirigée vers l'*intérieur* du conducteur, et (x_i, y_i, z_i) étant un point infiniment voisin de l'élément dS, mais situé à l'intérieur du conducteur.

Or l'égalité

$$\varepsilon V + \Theta + C = 0, \qquad (2)$$

permet d'écrire, en tout point intérieur au conducteur,

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial z}=0. \tag{5}$$

Les égalités (1), (2), (3), (4) et (5) donnent alors l'égalité

$$\begin{aligned}\delta F = \delta F_0 - C\Big[\int\Big(\delta\rho + \rho\,\frac{dv'-dv}{dv}\Big)\,dv + \mathsf{S}\Big(\delta\sigma + \sigma\,\frac{dS'-dS}{dS}\Big)\,dS\Big] \\ + 2\pi\varepsilon\,\mathsf{S}\,\sigma^2\,[\cos(N_i, x)\,\delta x + \cos(N_i, y)\,\delta y + \cos(N_i, z)\,\delta z]\,dS. \end{aligned}\tag{6}$$

Mais si l'on désigne par Q la charge électrique *invariable* du conducteur, on aura

$$\int \rho dv + \mathsf{S}\,\sigma dS = Q$$

et, par conséquent,

$$\int\Big(\delta\rho + \rho\,\frac{dv'-dv}{dv}\Big)\,dv + \mathsf{S}\Big(\delta\sigma + \sigma\,\frac{dS'-dS}{dS}\Big)\,dS = 0. \tag{7}$$

Moyennant l'égalité (7), l'égalité (6) peut s'écrire

$$\delta F = \delta F_0 + 2\pi\varepsilon\,\mathsf{S}\,\sigma^2\,[\cos(N_i, x)\,\delta x + \cos(N_i, y)\,\delta y + \cos(N_i, z)\,\delta z]\,dS.$$

Cette égalité nous fournit la proposition suivante:

Les forces qui agissent sur un conducteur électrisé déformable, mais incompressible, se composent:

1°. *Des forces qui agiraient sur le conducteur ramené à l'état neutre.*

2°. *D'une force appliquée à chaque élément dS de la surface qui limite le conducteur; cette force est normale à l'élément dS et dirigée vers l'extérieur du conducteur; elle a pour valeur*

$$T = 2\pi\varepsilon\sigma^2\,dS.$$

Ce théorème est bien connu.

CHAPÎTRE III.

Variation du Potentiel d'un Système de Diélectriques polarisés.

Nous allons maintenant—et c'est l'objet principal de ce mémoire—faire usage de l'égalité fondamentale obtenue au Chapître I pour étudier les milieux magnétiques ou diélectriques; afin d'éviter toute confusion, nous supposerons constamment dans notre analyse qu'il s'agisse de corps diélectriques; le lecteur apercevra sans peine les légères modifications qu'il faudrait faire subir à notre

exposé pour l'appliquer aux corps magnétiques; la principale modification consisterait à faire égale à 1 la constante ε des lois de Coulomb.

Soient A, B, C, les composantes de la polarisation en un point (x, y, z) intérieur à un diélectrique. Le Théorème fondamental et bien connu sur lequel nous nous appuierons est le suivant:

On peut sans changer ni la fonction potentielle, ni le potentiel du système, remplacer la polarisation diélectrique par une distribution électrique fictive définie de la manière suivante:

La distribution fictive a pour densité solide, en tout point intérieur à une masse diélectrique continue

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right); \tag{1}$$

elle a pour densité superficielle, en tout point de la surface terminale d'un diélectrique,

$$\sigma = -\left[A\cos(N_i, x) + B\cos(N_i, y) + C\cos(N_i, z)\right], \tag{2}$$

N_i *étant la demi-normale dirigée vers l'intérieur diélectrique; elle a pour densité superficielle, en tout point de la surface de contact de deux masses diélectriques* 1 *et* 2,

$$\begin{aligned}\sigma_{12} = &-\left[A_1\cos(N_1, x) + B_1\cos(N_1, y) + C_1\cos(N_1, z)\right]\\ &-\left[A_2\cos(N_2, x) + B_2\cos(N_2, y) + C_2\cos(N_2, z)\right],\end{aligned} \tag{3}$$

N_1, N_2, *étant les deux demi-normales dirigées respectivement vers l'intérieur de la masse* 1 *et vers l'intérieur de la masse* 2.

Imaginons deux diélectriques 1 et 2, dont S_1, S_2 sont les surfaces libres et dont S_{12} est la surface de contact. Soit Y le potentiel de la polarisation diélectrique sur elle même. En vertu des égalités (1), (2) et (3) du présent chapître et des égalités (28), (29), (30) et (31) du Chapître I, nous pourrons écrire

$$\begin{aligned}-\delta Y = &\,\varepsilon\int_1 V\delta\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right)dv_1\\ &+\varepsilon\int_1\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)dv_1\\ &+\varepsilon\int_1 V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right)dv_1\\ &+\varepsilon\, \mathbf{S}_{S_1} V\delta\left[A_1\cos(N_i, x) + B_1\cos(N_i, y) + C_1\cos(N_i, z)\right]dS_1\\ &+\varepsilon\, \mathbf{S}_{S_{12}} V\delta\left[A_1\cos(N_1, x) + B_1\cos(N_1, y) + C_1\cos(N_1, z)\right]dS_{12}\end{aligned}$$

$$+ \varepsilon \int_{S_1} [A_1 \cos(N_i, x) + B_1 \cos(N_i, y) + C_1 \cos(N_i, z)] \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z \right) dS_1$$

$$+ \varepsilon \int_{S_{12}} [A_1 \cos(N_1, x) + B_1 \cos(N_1, y) + C_1 \cos(N_1, z)] \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y_1} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z_1} \delta z \right) dS_{12}$$

$$- 2\pi\varepsilon \int_{S_1} [A_1 \cos(N_i, x) + B_1 \cos(N_i, y) + C_1 \cos(N_i, z)]^2 \times [\cos(N_i, x)\, \delta x + \cos(N_i, y)\, \delta y + \cos(N_i, z)\, \delta z]\, dS_1$$

$$+ \varepsilon \int_{S_1} V [A_1 \cos(N_i, x) + B_1 \cos(N_i, y) + C_1 \cos(N_i, z)] \frac{dS_1' - dS_1}{dS_1} dS_1$$

$$+ \text{etc.},$$

$$- \frac{\varepsilon}{2} \int_{S_{12}} [A_1 \cos(N_1, x) + B_1 \cos(N_1, y) + C_1 \cos(N_1, z) - A_2 \cos(N_2, x) - B_2 \cos(N_2, y) - C_2 \cos(N_2, z)]$$
$$\times \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) \delta x + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1} - \frac{\partial V}{\partial y_2} \right) \delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1} - \frac{\partial V}{\partial z_2} \right) \delta z \right] dS_{12}$$

$$+ \varepsilon \int_{S_{12}} [A_1 \cos(N_1, x) + B_1 \cos(N_1, y) + C_1 \cos(N_1, z) + A_2 \cos(N_2, x) + B_2 \cos(N_2, y) + C_2 \cos(N_2, z)]\, V \frac{dS_{12}' - dS_{12}}{dS_{12}} dS_{12}. \quad (4)$$

Le symbole + etc. remplace neuf termes qui se déduisent, en permutant les indices **1** et **2**, des neuf termes écrits avant ce symbole.

Nous allons transformer cette égalité.

Proposons nous d'abord d'évaluer la quantité $\delta \frac{\partial A}{\partial x}$.

Prenons deux états voisins du système.

Soient $M(x, y, z)$ et $M_1(x_1, y, z)$ deux points infiniment voisins du système pris dans le premier état; la droite MM_1 est parallèle à l'axe des x. Aux deux points M, M_1 correspondent, dans le second état, deux points infiniment voisins $M'(x', y', z')$ et $M_1'(x_1', y_1', z_1')$; la droite $M'M_1'$ n'est plus, en général, parallèle à l'axe des x. Considérons les deux points $M_2'(x_2', y_2', z')$ et $M_3'(x_2', y', z')$. La droite $M'M_3'$ est parallèle à l'axe des x; la droite $M_3'M_2'$ est parallèle à l'axe des y; la droite $M_2'M_1'$ est parallèle à l'axe des z.

Soient A, A_1, A', A_1', A_2', A_3' les valeurs aux points M, M_1, M', M_1', M_2', M_3' de la composante parallèle à Ox de l'intensité de polarisation; les valeurs non accentuées se rapportent au premier état du système et les valeurs accentuées au second.

Formons la quantité

$$J = \frac{A'_3 - A'}{x'_1 - x'} - \frac{A_1 - A}{x_1 - x}.$$

Si, laissant invariables les deux états du système, nous faisons tendre le point M_1 vers le point M, le point M'_3 tendra en même temps vers le point M' et la quantité J tendra vers $\left(\frac{\partial A'}{\partial x'} - \frac{\partial A}{\partial x}\right)$. Si, ensuite, nous faisons tendre le second état du système vers le premier, cette différence deviendra une quantité infiniment petite dont le terme principal sera précisément $\delta \frac{\partial A}{\partial x}$.

Ce terme principal peut s'évaluer de la manière suivante:

On vérifie sans peine l'identité

$$\begin{aligned} \frac{A'_3 - A'}{x'_1 - x'} - \frac{A_1 - A}{x_1 - x} = {} & \frac{A'_3 - A'_2}{y'_3 - y'_2} \frac{y'_3 - y'_2}{x'_1 - x'} \\ & + \frac{A'_2 - A'_1}{z'_2 - z'_1} \frac{z'_2 - z'_1}{x'_1 - x'} \\ & - \frac{(A'_1 - A')[(x'_1 - x_1) - (x' - x)]}{(x_1 - x)(x'_1 - x')} \\ & + \frac{(A'_1 - A_1) - (A' - A)}{x_1 - x}. \end{aligned}$$

Les identités

$$y'_2 = y'_1, \quad y'_3 = y', \quad z'_2 = z',$$

permettent d'écrire le second membre de cette égalité sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{(A'_1 - A_1) - (A' - A)}{x_1 - x} \\ & - \frac{1}{1 + \frac{(x'_1 - x_1) - (x' - x)}{x_1 - x}} \left\{ \frac{A'_3 - A'_2}{y'_3 - y'_2} \frac{(y'_1 - y_1) - (y' - y)}{x_1 - x} \right. \\ & \qquad + \frac{A'_2 - A'_1}{z'_2 - z'_1} \frac{(z'_1 - z_1) - (z' - z)}{x_1 - x} \\ & \left. + \left[\frac{A_1 - A}{x_1 - x} - \frac{(A'_1 - A_1) - (A' - A)}{x_1 - x}\right] \frac{(x'_1 - x') - (x_1 - x)}{x_1 - x} \right\}. \end{aligned}$$

Laissons invariables les deux états du système et faisons tendre de point M_1 vers

le point M. On voit sans peine que la quantité précédente tendra vers la limite

$$\frac{\partial(A'-A)}{\partial x} - \frac{1}{1+\frac{\partial(x'-x)}{\partial x}}\left\{\frac{\partial A'}{\partial y'}\frac{\partial(y'-y)}{\partial x} + \frac{\partial A'}{\partial z'}\frac{\partial(z'-z)}{\partial x} + \left[\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial(A'-A)}{\partial x}\right]\frac{\partial(x'-x)}{\partial x}\right\}$$

Faisons maintenant tendre le second état du système vers le premier et cette quantité deviendra un infiniment petit dont le terme principal sera

$$\frac{\partial \delta A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial \delta z}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial x}.$$

On trouve ainsi la première des égalités

$$\left.\begin{aligned}
\delta\frac{\partial A}{\partial x} &= \frac{\partial \delta A}{\partial x} - \left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial \delta z}{\partial x}\right),\\
\delta\frac{\partial B}{\partial y} &= \frac{\partial \delta B}{\partial y} - \left(\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial \delta z}{\partial y}\right),\\
\delta\frac{\partial C}{\partial z} &= \frac{\partial \delta C}{\partial z} - \left(\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial \delta z}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Ces égalités (5) permettent d'écrire l'égalité

$$\begin{aligned}
&\int_1 V\delta\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right) dv_1\\
&+\int_1 V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right) dv_1\\
&=\int_1 V\left(\frac{\partial \delta A_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta B_1}{\partial y} + \frac{\partial \delta C_1}{\partial z}\right) dv_1\\
&+\int_1 V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial \delta y}{\partial y} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial \delta z}{\partial z} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial \delta z}{\partial x}\right.\\
&\qquad + \frac{\partial B_1}{\partial y}\frac{\partial \delta z}{\partial z} - \frac{\partial B_1}{\partial z}\frac{\partial \delta z}{\partial y} + \frac{\partial B_1}{\partial y}\frac{\partial \delta x}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial y}\\
&\qquad \left. + \frac{\partial C_1}{\partial z}\frac{\partial \delta x}{\partial x} - \frac{\partial C_1}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\frac{\partial \delta y}{\partial y} - \frac{\partial C_1}{\partial y}\frac{\partial \delta y}{\partial z}\right) dv_1.
\end{aligned}$$

Des intégrations par parties permettent de transformer cette égalité en la suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_1 V\delta\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\right)dv_1\\
&+\int V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)dv_1\\
&=-\int_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta A_1+\frac{\partial V}{\partial y}\delta B_1+\frac{\partial V}{\partial z}\delta C_1\right)dv_1\\
&-\int_1\Big[\left(\frac{\partial B_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial B_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial C_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta x\\
&\qquad+\left(\frac{\partial C_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial C_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta y\\
&\qquad+\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial B_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta z\Big]dv_1\\
&-\mathrm{S}_{S_1}V[\cos(N_i,x)\delta A_1+\cos(N_i,y)\delta B_1+\cos(N_i,z)\delta C_1]\,dS_1\\
&-\mathrm{S}_{S_{12}}V[\cos(N_1,x)\delta A_1+\cos(N_1,y)\delta B_1+\cos(N_1,z)\delta C_1]\,dS_{12}\\
&-\mathrm{S}_{S_1}V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\right)[\cos(N_i,x)\delta x+\cos(N_i,y)\delta y+\cos(N_i,z)\delta z]\,dS_1\\
&-\mathrm{S}_{S_{12}}V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\right)[\cos(N_1,x)\delta x+\cos(N_1,y)\delta y+\cos(N_1,z)\delta z]\,dS_{12}\\
&+\mathrm{S}_{S_1}V\Big[\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial A_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial A_1}{\partial z}\delta z\right)\cos(N_i,x)\\
&\qquad+\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial B_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial B_1}{\partial z}\delta z\right)\cos(N_i,y)\\
&\qquad+\left(\frac{\partial C_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial C_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial C_1}{\partial z}\delta z\right)\cos(N_i,z)\Big]dS_1\\
&+\mathrm{S}_{S_{12}}V\Big[\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial A_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial A_1}{\partial z}\delta z\right)\cos(N_1,x)\\
&\qquad+\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial B_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial B_1}{\partial z}\delta z\right)\cos(N_1,y)\\
&\qquad+\left(\frac{\partial C_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial C_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial C_1}{\partial z}\delta z\right)\cos(N_1,z)\Big]dS_{12}.
\end{aligned}\tag{6}$$

D'autre part, on a les identités suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\int_1 \left(\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) dv_1 \\
-&\int_1 \Big[\left(\frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta x \\
&\quad + \left(\frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta y \\
&\quad + \left(\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta z\Big] dv_1 \\
=&\int_1 \Big[\left(\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial z}\delta z\right)\frac{\partial V}{\partial x} \\
&\quad + \left(\frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial z}\delta z\right)\frac{\partial V}{\partial y} \\
&\quad + \left(\frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial z}\delta z\right)\frac{\partial V}{\partial z}\Big] dv_1
\end{aligned}
\tag{7}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{S_1} V\Big[\left(\frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial z}\delta z\right)\cos(N_i, x) \\
&\qquad + \left(\frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial z}\delta x + \frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathrm{B}_1}{\partial z}\delta z\right)\cos(N_i, y) \\
&\qquad + \left(\frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathrm{C}_1}{\partial z}\delta z\right)\cos(N_i, z)\Big] dS_1 \\
+&\mathbf{S}_{S_1}[\mathrm{A}_1\cos(N_i, x) + \mathrm{B}_1\cos(N_i, y) + \mathrm{C}_1\cos(N_i, z)] \\
&\qquad \times\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z\right) dS_1 \\
=&\mathbf{S}_{S_1}\Big\{\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{A}_1 V)\delta x + \frac{\partial}{\partial y_i}(\mathrm{A}_1 V)\delta y + \frac{\partial}{\partial z_i}(\mathrm{A}_1 V)\delta z\right]\cos(N_i, x) \\
&\qquad + \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{B}_1 V)\delta x + \frac{\partial}{\partial y_i}(\mathrm{B}_1 V)\delta y + \frac{\partial}{\partial z_i}(\mathrm{C}_1 V)\delta z\right]\cos(N_i, y) \\
&\qquad + \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{C}_1 V)\delta x + \frac{\partial}{\partial y_i}(\mathrm{C}_1 V)\delta y + \frac{\partial}{\partial z_i}(\mathrm{C}_1 V)\delta z\right]\cos(N_i, z)\Big\} dS_1.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

On peut, en outre, écrire, en tout point de la surface S_{12}, une égalité analogue à la précédente ; nous la désignerons par (8 bis).

Enfin les égalités (32) du Chapître I, jointes à l'égalité (3) du présent Chapître donnent l'égalité:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2} = {} & 4\pi\left[A_1 \cos(N_1, x) + B_1 \cos(N_1, y) + C_1 \cos(N_1, z)\right] \cos(N_1, x) \\ & + 4\pi\left[A_2 \cos(N_2, x) + B_2 \cos(N_2, y) + C_2 \cos(N_2, z)\right] \cos(N_2, x), \end{aligned} \tag{9}$$

et deux égalités analogues pour $\left(\frac{\partial V}{\partial y_1} - \frac{\partial V}{\partial y_2}\right)$, $\left(\frac{\partial V}{\partial z_1} - \frac{\partial V}{\partial z_2}\right)$.

Moyennant les égalités (6), (7), (8), (8 bis) et (9), l'égalité (4) devient:

$$\begin{aligned}
-\delta Y = {} & -\varepsilon \int_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta A_1 + \frac{\partial V}{\partial y}\delta B_1 + \frac{\partial V}{\partial z}\delta C_1\right) dv_1 \\
& + \varepsilon \int_1 \left[\frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial A_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial A_1}{\partial z}\delta z\right)\right. \\
& \quad + \frac{\partial V}{\partial y}\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial B_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial B_1}{\partial z}\delta z\right) \\
& \quad \left. + \frac{\partial V}{\partial z}\left(\frac{\partial C_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial C_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial C_1}{\partial z}\delta z\right)\right] dv_1 \\
& - \varepsilon \mathop{\mathrm{S}}_{S_1} V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_i} + \frac{\partial B_1}{\partial y_i} + \frac{\partial C_1}{\partial z_i}\right) \\
& \qquad \times \left[\cos(N_i, x)\delta x + \cos(N_i, y)\delta y + \cos(N_i, z)\delta z\right] dS_1 \\
& + \varepsilon \mathop{\mathrm{S}}_{S_1} \left\{\left[\frac{\partial (A_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial (A_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial (A_1 V)}{\partial z_i}\delta z\right] \cos(N_i, x)\right. \\
& \qquad + \left[\frac{\partial (B_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial (B_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial (B_1 V)}{\partial z_i}\delta z\right] \cos(N_i, y) \\
& \qquad \left. + \left[\frac{\partial (C_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial (C_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial (C_1 V)}{\partial z_i}\delta z\right] \cos(N_i, z)\right\} dS_1 \\
& + \varepsilon \mathop{\mathrm{S}}_{S_1} V\left[A_1 \delta\cos(N_i, x) + B_1 \delta\cos(N_i, y) + C_1 \delta\cos(N_i, z)\right] dS_1 \\
& + \varepsilon \mathop{\mathrm{S}}_{S_1} V\left[A_1 \cos(N_i, x) + B_1 \cos(N_i, y) + C_1 \cos(N_i, z)\right] \frac{dS_1' - dS_1}{dS_1} dS_1 \\
& - 2\pi\varepsilon \mathop{\mathrm{S}}_{S_1} \left[A_1 \cos(N_i, x) + B_1 \cos(N_i, y) + C_1 \cos(N_i, z)\right]^2 \\
& \qquad \times \left[\cos(N_i, x)\delta x + \cos(N_i, y)\delta y + \cos(N_i, z)\delta z\right] dS_1 \\
& + \text{etc.}, \\
& - \varepsilon \mathop{\mathrm{S}}_{S_{12}} V\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_1}{\partial y_1} + \frac{\partial C_1}{\partial z_1} - \frac{\partial A_2}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial y_2} - \frac{\partial C_2}{\partial z_2}\right) \\
& \qquad \times \left[\cos(N_1, x)\delta x + \cos(N_1, y)\delta y + \cos(N_1, z)\delta z\right] dS_{12}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\varepsilon \mathop{\mathrm{S}}\nolimits_{S_{12}} \Big[\Big\{\Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\mathrm{A}_2 V)}{\partial x_2}\Big]\delta x \\
&\qquad + \Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial y_1} + \frac{\partial(\mathrm{A}_2 V)}{\partial y_2}\Big]\delta y \\
&\qquad + \Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial z_1} - \frac{\partial(\mathrm{A}_2 V)}{\partial z_2}\Big]\delta z\Big\} \cos(N_1, x) \\
&\qquad + \Big\{\Big[\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\mathrm{B}_2 V)}{\partial x_2}\Big]\delta x \\
&\qquad + \Big[\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial y_1} - \frac{\partial(\mathrm{B}_2 V)}{\partial y_2}\Big]\delta y \\
&\qquad + \Big[\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial z_1} - \frac{\partial(\mathrm{B}_2 V)}{\partial z_2}\Big]\delta z\Big\} \cos(N_1, y) \\
&\qquad + \Big\{\Big[\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\mathrm{C}_2 V)}{\partial x_2}\Big]\delta x \\
&\qquad + \Big[\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial y_1} - \frac{\partial(\mathrm{C}_2 V)}{\partial y_2}\Big]\delta y \\
&\qquad + \Big[\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial z_1} - \frac{\partial(\mathrm{C}_2 V)}{\partial z_2}\Big]\delta z\Big\} \cos(N_1, z)\Big]\, dS_{12} \\
&+\varepsilon \mathop{\mathrm{S}}\nolimits_{S_{12}} V[(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2)\,\delta\cos(N_1, x) + (\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_2)\,\delta\cos(N_1, y) \\
&\qquad\qquad + (\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2)\,\delta\cos(N_1, z)]\, dS_{12} \\
&+\varepsilon \mathop{\mathrm{S}}\nolimits_{S_{12}} V[(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2)\cos(N_1, x) + (\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_2)\cos(N_1, y) \\
&\qquad\qquad + (\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2)\cos(N_1, z)]\,\frac{dS'_{12} - dS_{12}}{dS_{12}}\, dS_{12} \\
&-2\pi\varepsilon \mathop{\mathrm{S}}\nolimits_{S_{12}} \{[\mathrm{A}_1\cos(N_1, x) + \mathrm{B}_1\cos(N_1, y) + \mathrm{C}_1\cos(N_1, z)]^2 \\
&\qquad - [\mathrm{A}_2\cos(N_2, x) + \mathrm{B}_2\cos(N_2, y) + \mathrm{C}_2\cos(N_2, z)]^2\} \\
&\qquad\quad \times [\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\, dS_{12}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Le symbole + etc. remplace sept termes qui se déduisent des sept premiers termes de l'expression de δY en remplaçant l'indice 1 par l'indice 2.

Faisons choix, sur la surface S_1, d'un système de coordonnées curvilignes rectangulaires:

$$
\begin{aligned}
&(u) \quad v = \text{const.}, \\
&(v) \quad u = \text{const.}
\end{aligned}
$$

Supposons que le carré de l'élément linéaire tracé sur la surface soit représenté par la formule

$$ds_1^2 = A_1(u, v)\, du^2 + B_1(u, v)\, dv^2.$$

L'élément superficiel aura pour valeur

$$dS_1 = \sqrt{A_1 B_1}\, du\, dv. \tag{11}$$

Prenons un point M, intérieur au corps 1, pris dans le premier état, et infiniment voisin de la surface S_1; ce point a pour correspondant, dans le second état, un point M'. Projetons MM' sur la tangente à la ligne (u), sur la tangente à la ligne (v), enfin sur la normale N_i. Désignons les trois projections obtenues par

$$\sqrt{A}\,\delta u, \quad \sqrt{B}\,\delta v, \quad \delta N_i.$$

Nous aurons évidemment, pour un point (x_i, y_i, z_i) infiniment voisin de la surface S_1

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial z_i}\delta z \\ &= \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial u}\delta u + \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial v}\delta v + \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial N_i}\delta N_i\end{aligned} \tag{12}$$

et aussi

$$\delta \cos(N_i, x) = \frac{\partial \cos(N_i, x)}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \cos(N_i, x)}{\partial v}\delta v + D\cos(N_i, x). \tag{13}$$

Le symbole $D \cos(N_i, x)$ a le sens suivant:

Soit M un point de la surface S_1; par ce point, menons la normale à la surface S_1; prolongeons la jusqu'au point m où elle rencontre la surface S_1'; en m menons la demi-normale n_i à la surface S_1' vers l'intérieur du fluide 1; nous aurons

$$D\cos(N_i, x) = \cos(n_i, x) - \cos(N_i, x). \tag{14}$$

Une égalité connue* donne

$$\begin{aligned}\frac{dS_1' - dS_1}{dS_1} &= \frac{1}{2AB}\left[\frac{\partial(AB)}{\partial u}\delta u + \frac{\partial(AB)}{\partial v}\delta v\right] \\ &\quad + \frac{\delta du}{du} + \frac{\delta dv}{dv} - \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\right)\delta N_i;\end{aligned} \tag{15}$$

R_i et R_i' sont les deux rayons de courbure principaux de la surface S_1, en un point de l'élément dS_1; chacun de ces rayons est compté positivement lorsque, pour aller de la surface au centre de courbure correspondant, on marche dans le sens de la demi-normale N_i.

---

* P. Duhem, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique.* Tome II, p. 83.

Les égalités (11), (12), (13) et (15) nous permettent d'écrire

$$\mathbf{S}_{S_1}\left[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\right]\cos(N_i, x)\, dS_1$$
$$+\mathbf{S}_{S_1}\mathrm{A}_1 V\,\delta\cos(N_i, x)\, dS_1$$
$$+\mathbf{S}_{S_1}\mathrm{A}_1 V\cos(N_i, x)\frac{dS_1' - dS_1}{dS_1}\, dS_1$$
$$=\mathbf{S}_{S_1}\left[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i, x) - \mathrm{A}_1 V\left(\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_i'}\right)\cos(N_i, x)\right]\delta N_i dS_1$$
$$+\mathbf{S}_{S_1}\mathrm{A}_1 VD\cos(N_i, x)\, dS_1$$
$$+\int\int\Big[\left\{\frac{\partial\left[\mathrm{A}_1 V\cos(N_i, x)\right]}{\partial u} + \frac{\mathrm{A}_1 V\cos(N_i, x)}{2AB}\frac{\partial(AB)}{\partial u}\right\}\delta u$$
$$+\left\{\frac{\partial\left[\mathrm{A}_1 V\cos(N_i, x)\right]}{\partial v} + \frac{\mathrm{A}_1 V\cos(N_i, x)}{2AB}\frac{\partial(AB)}{\partial v}\right\}\delta v$$
$$+\mathrm{A}_1 V\cos(N_i, x)\left(\frac{\delta du}{du}+\frac{\delta dv}{dv}\right)\Big]\sqrt{AB}\, du\, dv. \quad (16)$$

Soient:

L_1 le contour de la surface S_1,

n_i une demi-droite normale à ce contour, tangente à la surface S_1, et dirigée vers l'intérieur de l'aire S_1,

(n_i, u) l'angle que cette demi-droite fait avec la tangente menée par son pied à la ligne (u) $(v = \text{const.})$, cette tangente étant dirigée dans le sens où le paramètre u va en croissant,

(n_i, v) l'angle que cette demi-droite fait avec la tangente menée par son pied à la ligne (v) $(u = \text{const.})$, cette tangente étant dirigée dans le sens où le paramètre v va en croissant,

$F(u, v)$ une fonction régulière des variables u, v.

Si la surface S_1 ne présente aucune singularité, on a*

$$\int\int\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{F}{2AB}\frac{\partial(AB)}{\partial u}\right]\delta u\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{F}{2AB}\frac{\partial(AB)}{\partial v}\right]\delta v + F\left(\frac{\delta du}{du}+\frac{\delta dv}{dv}\right)\right\}\sqrt{AB}\, du\, dv.$$
$$+\int F\left[\cos(n_i, u)\sqrt{A}\,\delta u + \cos(n_i, v)\sqrt{B}\,\delta v\right] dL_1 = 0. \quad (17)$$

---

* P. Duhem, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique.* T. II, p. 85.

Appliquons cette égalité (17) à la fonction

$$F = A_1 V \cos(N_i, x);$$

remarquons, en outre, que l'on a

$$\cos(n_i, u)\sqrt{A}\,\delta u + \cos(n_i, v)\sqrt{B}\,\delta v = \cos(n_i, x)\,\delta x + \cos(n_i, y)\,\delta y + \cos(n_i, z)\,\delta z$$

et l'égalité (16) se transformera en une autre égalité qui, jointe à deux égalités analogues, donnera

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathrm{S}}_{S_1}\Big\{\Big[\frac{\partial(A_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(A_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(A_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i, x)\\
&\quad + \Big[\frac{\partial(B_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(B_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(B_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i, y)\\
&\quad + \Big[\frac{\partial(C_1 V)}{\partial x_i}\delta x + \frac{\partial(C_1 V)}{\partial y_i}\delta y + \frac{\partial(C_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i, z)\Big\}\,dS_1\\
&+ \mathop{\mathrm{S}}_{S_1} V\,[A_1\delta\cos(N_i, x) + B_1\delta\cos(N_i, y) + C_1\delta\cos(N_i, z)]\,dS_1\\
&+ \mathop{\mathrm{S}}_{S_1} V\,[A_1\cos(N_i, x) + B_1\cos(N_i, y) + C_1\cos(N_i, z)]\,\frac{dS_1' - dS_1}{dS_1}\,dS_1\\
&= \mathop{\mathrm{S}}_{S_1} V\,[A_1 D\cos(N_i, x) + B_1 D\cos(N_i, y) + C_1 D\cos(N_i, z)]\,dS_1\\
&+ \mathop{\mathrm{S}}_{S_1}\Big\{\frac{\partial(A_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i, x) + \frac{\partial(B_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i, y) + \frac{\partial(C_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i, z)\\
&\qquad - V\,[A_1\cos(N_i, x) + B_1\cos(N_i, y) + C_1\cos(N_i, z)]\Big(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\Big)\Big\}\\
&\qquad \times [\cos(N_i, x)\,\delta x + \cos(N_i, y)\,\delta y + \cos(N_i, z)\,\delta z]\,dS_1\\
&- \int_{L_1} V\,[A_1\cos(N_i, x) + B_1\cos(N_i, y) + C_1\cos(N_i, z)]\\
&\qquad \times [\cos(n_i, x)\,\delta x + \cos(n_i, y)\,\delta y + \cos(n_i, z)\,\delta z]\,dL_1. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Proposons nous maintenant d'évaluer la quantité

$$\mathop{\mathrm{S}}_{S_1} V\,[A_1 D\cos(N_i, x) + B_1 D\cos(N_i, y) + C_1 D\cos(N_i, z)]\,dS_1,$$

et, pour cela, cherchons d'abord l'expression de $D\cos(N_i, x)$ en un point quelconque M_1 de la surface S_1.

Soient: Σ_1 une aire quelconque tracée sur la surface S_1, autour du point M_1,

λ_1 le contour de l'aire Σ_1,

ν_i une demi-droite normale à ce contour, tangente à la surface S_1 et dirigée vers l'intérieur de l'aire Σ_1.

Par chaque point M de l'aire Σ_1, élevons une normale à la surface S_1, et soit m le point où cette normale rencontre la surface S_1'; à chaque point M, faisons correspondre le point m ainsi défini; à l'aire Σ_1, tracée sur la surface S_1, correspondra une aire σ_1 tracée sur la surface S_1'; $d\Sigma_1$, $d\sigma_1$, seront deux éléments correspondants des aires Σ_1, σ_1

Un lemme bien connu de Gauss nous apprend que, pour une surface fermée quelconque S, on a

$$\mathsf{S} \cos(N, x)\, dS = 0,$$

pourvu que les demi-normales N soient portées toutes vers l'intérieur, ou toutes vers l'extérieur de la surface S.

Appliquons ce lemme à la surface fermée que composent l'aire Σ_1, l'aire σ_1, et la surface réglée engendrée par les normales à la surface S_1 le long du contour λ_1; il est facile de voir que nous aurons, en tout état de cause:

$$\mathsf{S}_{\sigma_1} \cos(n_i, x)\, d\sigma_1 - \mathsf{S}_{\Sigma_1} \cos(N_i, x)\, d\Sigma_1 + \int \cos(\nu_i, x)\, \delta N_i\, d\lambda_1 = 0,$$

ou bien, en tenant compte de l'égalité (14) et en remarquant que

$$\frac{d\sigma_1 - d\Sigma_1}{d\Sigma_1} = -\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\right) \delta N_i,$$

$$\mathsf{S}_{\Sigma_1} D \cos(N_i, x)\, d\Sigma_1 = \mathsf{S}_{\Sigma_1} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\right) \cos(N_i, x)\, \delta N_i\, d\Sigma_1 - \int \cos(\nu_i, x)\, \delta N_i\, d\lambda_1. \quad (19)$$

Les égalités

$$\left.\begin{aligned}
&\cos(\nu_i, x) \frac{\partial x}{\partial u} + \cos(\nu_i, y) \frac{\partial y}{\partial u} + \cos(\nu_i, z) \frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{A} \cos(\nu_i, u), \\
&\cos(\nu_i, x) \frac{\partial x}{\partial v} + \cos(\nu_i, y) \frac{\partial y}{\partial v} + \cos(\nu_i, z) \frac{\partial z}{\partial v} = \sqrt{B} \cos(\nu_i, v), \\
&\cos(\nu_i, x) \cos(N_i, x) + \cos(\nu_i, y) \cos(N_i, y) + \cos(\nu_i, z) \cos(N_i, z) = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

donnent:

$$\begin{aligned}
\cos(\nu_i, x) = \frac{1}{\mathfrak{D}} \Big\{ &\left[\frac{\partial y}{\partial v} \cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v} \cos(N_i, y)\right] \sqrt{A} \cos(\nu_i, u) \\
&- \left[\frac{\partial y}{\partial u} \cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u} \cos(N_i, y)\right] \sqrt{B} \cos(\nu_i, v) \Big\}, \quad (21)
\end{aligned}$$

en posant:

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \cos(N_i, x) & \cos(N_i, y) & \cos(N_i, z) \end{vmatrix} \tag{22}$$

Nous aurons alors

$$\int \cos(\nu_i, x)\, \delta N_i\, d\lambda_1$$
$$= \int \frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}} \Big\{ \Big[\frac{\partial y}{\partial v} \cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v} \cos(N_i, y)\Big] \sqrt{A} \cos(\nu_i, u)$$
$$- \Big[\frac{\partial y}{\partial v} \cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u} \cos(N_i, y)\Big] \sqrt{B} \cos(\nu_i, v) \Big\} d\lambda_1. \tag{23}$$

Mais si $G(u, v)$ désigne une fonction de u, v, régulière dans l'aire Σ_1, on a

$$\left.\begin{aligned} \int G\sqrt{A} \cos(\nu_i, u)\, d\lambda_1 &= \int\int \frac{\partial G}{\partial u} \sqrt{AB}\, du\, dv = \mathop{\mathrm{S}}_{\Sigma_1} \frac{\partial G}{\partial u}\, d\Sigma_1, \\ \int G\sqrt{B} \cos(\nu_i, v)\, d\lambda_1 &= \int\int \frac{\partial G}{\partial v} \sqrt{AB}\, du\, dv = \mathop{\mathrm{S}}_{\Sigma_1} \frac{\partial G}{\partial v}\, d\Sigma_1. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Moyennant ces lemmes, l'égalité (23) peut s'écrire

$$\int \cos(\nu_i, x)\, \delta N_i\, d\lambda_1 = \mathop{\mathrm{S}}_{\Sigma_1} \Big[\frac{\partial}{\partial u} \Big\{ \frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}} \Big[\frac{\partial y}{\partial v} \cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v} \cos(N_i, y)\Big] \Big\}$$
$$- \frac{\partial}{\partial v} \Big\{ \frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}} \Big[\frac{\partial y}{\partial v} \cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u} \cos(N_i, y)\Big] \Big\} \Big] d\Sigma_1. \tag{25}$$

Moyennant cette égalité (25), l'égalité (29) devient

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\Sigma_1} \Big[D \cos(N_i, x) - \Big(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\Big) \cos(N_i, x)\, \delta N_i$$
$$+ \frac{\partial}{\partial u} \Big\{ \frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}} \Big[\frac{\partial y}{\partial v} \cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v} \cos(N_i, y)\Big] \Big\}$$
$$- \frac{\partial}{\partial v} \Big\{ \frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}} \Big[\frac{\partial y}{\partial u} \cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u} \cos(N_i, y)\Big] \Big\} \Big] d\Sigma_1 = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu quelle que soit l'aire Σ_1, tracée autour du point M_1; on en conclut sans peine que l'on doit avoir, en tout point M_1 de la surface S_1,

$$D \cos(N_i, x) = \Big(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\Big) \cos(N_i, x)\, \delta N_i$$
$$- \frac{\partial}{\partial u} \Big\{ \frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}} \Big[\frac{\partial y}{\partial v} \cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v} \cos(N_i, y)\Big] \Big\}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial v} \Big\{ \frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}} \Big[\frac{\partial y}{\partial u} \cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u} \cos(N_i, y)\Big] \Big\}. \tag{26}$$

Cette égalité (26) nous permet d'écrire:

$$\mathbf{S}_{S_1} V\mathrm{A}_1 D \cos(N_i, x)\, dS_1 = \mathbf{S}_{S_1} V\mathrm{A}_1 \cos(N_i, x)\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\right)\delta N_i\, dS_1$$
$$- \mathbf{S}_{S_1}\Big[V\mathrm{A}_1 \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]\right\}$$
$$- V\mathrm{A}_1 \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\right]\right\}\Big] dS_1. \qquad (27)$$

Mais on a

$$\mathbf{S}_{S_1}\Big[V\mathrm{A}_1 \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]\right\}$$
$$- V\mathrm{A}_1 \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\right]\right\}\Big] dS_1$$
$$= \mathbf{S}_{S_1}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{V\mathrm{A}_1\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]\right\}$$
$$- \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{V\mathrm{A}_1\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\right]\right\}\Big] dS_1$$
$$- \mathbf{S}_{S_1}\left\{\frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial u}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\right]\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial v}\right\}\delta N_i\, dS_1. \qquad (28)$$

D'ailleurs les égalités

$$\cos(u, x)\frac{\partial x}{\partial u} + \cos(u, y)\frac{\partial y}{\partial u} + \cos(u, z)\frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{\mathrm{A}},$$
$$\cos(u, x)\frac{\partial x}{\partial v} + \cos(u, y)\frac{\partial y}{\partial v} + \cos(u, z)\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$
$$\cos(u, x)\cos(N_i, x) + \cos(u, y)\cos(N_i, y) + \cos(u, z)\cos(N_i, z) = 0,$$

qui résultent immédiatement des égalités:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{A}\cos(u, x), \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{A}\cos(u, y), \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{A}\cos(u, z),$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{B}\cos(v, x), \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \sqrt{B}\cos(v, y), \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \sqrt{B}\cos(v, z),$$

donnent:

$$\frac{\cos(u, x)}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right].$$

On trouve de même

$$\frac{\cos(v, x)}{\sqrt{B}} = -\frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\right].$$

Moyennant ces égalités, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{S_1}\Big\{ & \frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial u} \\ & - \frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\right]\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial v}\Big\}\,\delta N_i\, dS_1 \\ = \mathbf{S}_{S_1} & \left[\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial u}\cos(u, x) + \frac{1}{\sqrt{B}}\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial v}\cos(v, x)\right]\delta N_i\, dS_1. \end{aligned}$$

Mais, d'autre part, on a

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial u}\cos(u, x) + \frac{1}{\sqrt{B}}\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial v}\cos(v, x) + \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i, x) = \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i},$$

en sorte que l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{S_1}\Big\{ & \frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial u} \\ & - \frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\right]\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial v}\Big\}\,\delta N_i\, dS_1 \\ = \mathbf{S}_{S_1} & \left[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i} - \frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i, x)\right]\delta N_i\, dS_1. \end{aligned} \tag{29}$$

Appliquons maintenant à la surface S_1 tout entière le lemme représenté par les identités (21); nous aurons

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{S_1}\Big[& \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\mathrm{A}_1 V\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]\right\} \\ & - \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{\mathrm{A}_1 V\delta N_i}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\right]\right\}\Big]\, dS_1 \\ = \int \mathrm{A}_1 V \Big\{ & \frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]\sqrt{A}\cos(n_i, u) \\ & - \frac{1}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]\sqrt{B}\cos(n_i, v)\Big\}\,\delta N_i\, dL_1. \end{aligned}$$

Les égalités

$$\cos(u, x) = \frac{\sqrt{A}}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]$$

$$\cos(v, x) = -\frac{\sqrt{B}}{\mathfrak{D}}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\right]$$

transforment cette égalité en

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{S_1}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\Big\{\frac{A_1 V\delta N_i}{\mathfrak{D}}\Big[\frac{\partial y}{\partial v}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial v}\cos(N_i, y)\Big]\Big\} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial v}\Big\{\frac{A_1 V\delta N_i}{\mathfrak{D}}\Big[\frac{\partial y}{\partial u}\cos(N_i, z) - \frac{\partial z}{\partial u}\cos(N_i, y)\Big]\Big\}\Big] dS_1 \\
&= \int A_1 V[\cos(n_i, u)\cos(u, x) + \cos(n_i, v)\cos(v, x)]\, \delta N_i\, dL_1 \\
&= \int A_1 V\cos(n_i, x)\,\delta N_i\, dL_1. \qquad (30)
\end{aligned}$$

Les égalités (27), (28), (29), (30) donnent

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{S_1} A_1 VD\cos(N_i, x)\, dS_1 = &\mathbf{S}_{S_1} A_1 V\cos(N_i, x)\Big(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\Big)\delta N_i\, dS_1 \\
&- \mathbf{S}_{S_1}\Big[\frac{\partial(A_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i, x) - \frac{\partial(A_1 V)}{\partial x_i}\Big]\delta N_i\, dS_1 \\
&+ \int A_1 V\cos(n_i, x)\,\delta N_i\, dL_1.
\end{aligned}$$

Cette égalité, jointe à deux autres égalités semblables que l'on obtient en permutant la lettre x avec les lettres y et z, donne

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{S_1} V[A_1 D\cos(N_i, x) + B_1 D\cos(N_i, y) + C_1 D\cos(N_i, z)]\, dS_1 \\
&= \mathbf{S}_{S_1} V\Big[A_1\cos(N_i, x) + B_1\cos(N_i, y) + C_1\cos(N_i, z)\Big]\Big(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'}\Big)\delta N_i\, dS_1 \\
&- \mathbf{S}_{S_1}\Big[\frac{\partial(A_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i, x) + \frac{\partial(B_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i, y) + \frac{\partial(C_1 V)}{\partial N_i}\cos(N_i, z)\Big]\delta N_i\, dS_1 \\
&+ \mathbf{S}_{S_1}\Big[\frac{\partial(A_1 V)}{\partial x_i} + \frac{\partial(B_1 V)}{\partial y_i} + \frac{\partial(C_1 V)}{\partial z_i}\Big]\delta N_i\, dS_1 \\
&+ \int V[A_1\cos(n_i, x) + B_1\cos(n_i, y) + C_1\cos(n_i, z)]\,\delta N_i\, dL_1. \qquad (31)
\end{aligned}$$

Les égalités (18) et (31) donnent :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}_{S_1}\Big\{\Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i}\delta x+\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial y_i}\delta y+\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i,x)\\
&\quad+\Big[\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial x_i}\delta x+\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial y_i}\delta y+\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i,y)\\
&\quad+\Big[\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial x_i}\delta x+\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial y_i}\delta y+\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i,z)\Big\}dS_1\\
&+\mathrm{S}_{S_1}V[\mathrm{A}_1\delta\cos(N_i,x)+\mathrm{B}_1\delta\cos(N_i,y)+\mathrm{C}_1\delta\cos(N_i,z)]\,dS_1\\
&+\mathrm{S}_{S_1}V[\mathrm{A}_1\cos(N_i,x)+\mathrm{B}_1\cos(N_i,y)+\mathrm{C}_1\cos(N_i,z)]\,\frac{dS_1'-dS_1}{dS_1}\,dS_1\\
&=\mathrm{S}_{S_1}\Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i}+\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial y_i}+\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial z_i}\Big]\delta N_i\,dS_1\\
&+\int V\{[\mathrm{A}_1\cos(n_i,x)+\mathrm{B}_1\cos(n_i,y)+\mathrm{C}_1\cos(n_i,z)]\,dN_i\\
&\qquad-[\mathrm{A}_1\cos(N_i,x)+\mathrm{B}_1\cos(N_i,y)+\mathrm{C}_1\cos(N_i,z)]\,\delta n_i\}\,dL_1. \qquad (32)
\end{aligned}$$

Cette égalité est générale.

Mais l'expression de δY obtenue au Chapître I cesserait d'être valable si, dans la déformation du système, les lignes le long desquelles la densité σ est discontinue se déplaçaient ; *on ne doit donc appliquer les formules établies qu'aux déplacements pour lesquels*

$$\delta x=0,\quad \delta y=0,\quad \delta z=0,$$

en tout point des lignes L_1, L_2, L_{12}, *qui limitent les surfaces* S_1, S_2, S_{12}.

Dans ces conditions, l'égalité (32) peut s'écrire simplement

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}_{S_1}\Big\{\Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i}\delta x+\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial y_i}\delta y+\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i,x)\\
&\quad+\Big[\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial x_i}\delta x+\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial y_i}\delta y+\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i,y)\\
&\quad+\Big[\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial x_i}\delta x+\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial y_i}\delta y+\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial z_i}\delta z\Big]\cos(N_i,z)\Big\}dS_1\\
&+\mathrm{S}_{S_1}V[\mathrm{A}_1\delta\cos(N_i,x)+\mathrm{B}_1\delta\cos(N_i,y)+\mathrm{C}_1\delta\cos(N_i,z)]\,dS_1\\
&+\mathrm{S}_{S_1}V[\mathrm{A}_1\cos(N_i,x)+\mathrm{B}_1\cos(N_i,y)+\mathrm{C}_1\cos(N_i,z)]\,\frac{dS_1'-dS_1}{dS_1}\,dS_1\\
&=\mathrm{S}_{S_1}\Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_i}+\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial y_i}+\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial z_i}\Big]\delta N_i\,dS_1. \qquad (33)
\end{aligned}$$

Nous pouvons écrire, pour la surface S_2, une égalité analogue; nous la désignerons par (33 bis); enfin une démonstration semblable nous permettra d'écrire

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{S_{12}}\Big[\Big\{\Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_1}-\frac{\partial(\mathrm{A}_2 V)}{\partial x_2}\Big]\delta x+\Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial y_1}-\frac{\partial(\mathrm{A}_2 V)}{\partial y_2}\Big]\delta y \\
&\qquad\qquad+\Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial z_1}-\frac{\partial(\mathrm{A}_2 V)}{\partial z_2}\Big]\delta z\Big\}\cos(N_i, x) \\
&\quad+\Big\{\Big[\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial x_1}-\frac{\partial(\mathrm{B}_2 V)}{\partial x_2}\Big]\delta x+\Big[\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial y_1}-\frac{\partial(\mathrm{B}_2 V)}{\partial y_2}\Big]\delta y \\
&\qquad\qquad+\Big[\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial z_1}-\frac{\partial(\mathrm{B}_2 V)}{\partial z_2}\Big]\delta z\Big\}\cos(N_i, y) \\
&\quad+\Big\{\Big[\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial x_1}-\frac{\partial(\mathrm{C}_2 V)}{\partial x_2}\Big]\delta x+\Big[\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial y_1}-\frac{\partial(\mathrm{C}_2 V)}{\partial y_2}\Big]\delta y \\
&\qquad\qquad+\Big[\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial z_1}-\frac{\partial(\mathrm{C}_2 V)}{\partial z_2}\Big]\delta z\Big\}\cos(N_i, z)\Big]\,dS_{12} \\
&+\mathbf{S}_{S_{12}} V\,[(\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2)\,\delta\cos(N_1, x)+(\mathrm{B}_1-\mathrm{B}_2)\,\delta\cos(N_1, y)+(\mathrm{C}_1-\mathrm{C}_2)\,\delta\cos(N_1, z)]\,dS_{12} \\
&+\mathbf{S}_{S_{12}} V\,[(\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_2)\cos(N_1, x)+(\mathrm{B}_1-\mathrm{B}_2)\cos(N_1, y) \\
&\qquad\qquad+(\mathrm{C}_1-\mathrm{C}_2)\cos(N_1, z)]\,\frac{dS'_{12}-dS_{12}}{dS_{12}}\,dS_{12} \\
&=\mathbf{S}_{S_{12}}\Big[\frac{\partial(\mathrm{A}_1 V)}{\partial x_1}-\frac{\partial(\mathrm{A}_2 V)}{\partial x_2}+\frac{\partial(\mathrm{B}_1 V)}{\partial y_1}-\frac{\partial(\mathrm{B}_2 V)}{\partial y_2} \\
&\qquad\qquad+\frac{\partial(\mathrm{C}_1 V)}{\partial z_1}-\frac{\partial(\mathrm{C}_2 V)}{\partial z_2}\Big]\,\delta N_1\,dS_{12}. \qquad (34)
\end{aligned}$$

Les égalités (10), (33), (33 bis) et (34) donnent

$$\begin{aligned}
\delta Y=\;&\varepsilon\int_1\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\delta\mathrm{A}_1+\frac{\partial V}{\partial y}\delta\mathrm{B}_1+\frac{\partial V}{\partial z}\delta\mathrm{C}_1\Big)dv_1 \\
&-\varepsilon\int_1\Big[\frac{\partial V}{\partial x}\Big(\frac{\partial\mathrm{A}_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\mathrm{A}_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\mathrm{A}_1}{\partial z}\delta z\Big) \\
&\qquad+\frac{\partial V}{\partial y}\Big(\frac{\partial\mathrm{B}_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\mathrm{B}_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\mathrm{B}_1}{\partial z}\delta z\Big) \\
&\qquad+\frac{\partial V}{\partial z}\Big(\frac{\partial\mathrm{C}_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\mathrm{C}_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\mathrm{C}_1}{\partial z}\delta z\Big)\Big]dv_1 \\
&-\varepsilon\,\mathbf{S}_{S_1}\Big(\mathrm{A}_1\frac{\partial V}{\partial x_i}+\mathrm{B}_1\frac{\partial V}{\partial y_i}+\mathrm{C}_1\frac{\partial V}{\partial z_i}\Big)\delta N_i\,dS_1 \\
&+2\pi\varepsilon\,\mathbf{S}_{S_1}[\mathrm{A}_1\cos(N_i, x)+\mathrm{B}_1\cos(N_i, y)+\mathrm{C}_1\cos(N_i, z)]^2\,\delta N_i\,dS_1 \\
&+\text{etc.} \\
&-\varepsilon\,\mathbf{S}_{S_{12}}\Big(\mathrm{A}_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+\mathrm{B}_1\frac{\partial V}{\partial y_1}+\mathrm{C}_1\frac{\partial V}{\partial z_1}-\mathrm{A}_2\frac{\partial V}{\partial x_2}-\mathrm{B}_2\frac{\partial V}{\partial y_2}-\mathrm{C}_2\frac{\partial V}{\partial z_2}\Big)\delta N_i\,dS_{12} \\
&+2\pi\varepsilon\,\mathbf{S}_{S_{12}}\{[\mathrm{A}_1\cos(N_1, x)+\mathrm{B}_1\cos(N_1, y)+\mathrm{C}_1\cos(N_1, z)]^2 \\
&\qquad-[\mathrm{A}_2\cos(N_2, x)+\mathrm{B}_2\cos(N_2, y)+\mathrm{C}_2\cos(N_2, z)]^2\}\,\delta N_1\,dS_{12}. \qquad (35)
\end{aligned}$$

On pourrait supposer les corps 1 et 2 placés dans le champ engendré par d'autres corps électrisés et polarisés ; *si ces corps sont fixes de forme et de position, si leur état d'électrisation et de polarisation est invariable, enfin s'ils n'ont avec les corps* 1 *et* 2 *aucun point de contact*, l'introduction de ces corps ne modifie pas l'expression de δY; seulement, dans cette expression, V représente alors la *fonction potentielle totale*, provenant non seulement de la polarisation des corps 1 et 2, mais encore de la distribution électrique ou diélectrique répandue sur les corps invariables.

Ajoutons encore une remarque qui nous sera utile au chapître suivant.

La formule précédente, comme toutes celles que nous avons écrites jusqu'ici, a été démontrée en supposant que δx, δy, δz étaient des fonctions continues de x, y, z, admettant des dérivées partielles par rapport à ces variables ; toutefois, il serait aisé de les étendre au cas où les déplacements δx, δy, δz, seraient discontinus le long de certaines surfaces, pourvu que la condition exprimée par l'égalité suivante soit vérifiée en chaque point de ces surfaces :

$$\begin{aligned}&\cos(N, x)\,\delta x + \cos(N, y)\,\delta y + \cos(N, z)\,\delta z\\&+ \cos(N', x)\,\delta' x + \cos(N', y)\,\delta' y + \cos(N', z)\,\delta' z = 0.\end{aligned} \tag{36}$$

Dans cette égalité, δx, δy, δz, sont les composantes du déplacement du premier côté de la surface ; $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$, les composantes du déplacement de l'autre côté ; N est la demi-normale dirigée du premier côté ; N', la demi-normale dirigée du second côté.

L'égalité (35) ne diffère de l'expression de δY dont nous avions fait usage dans nos précédentes publications que par les termes

$$2\pi\varepsilon \int_{S_1} [A_1 \cos(N_i, x) + B_1 \cos(N_i, y) + C_1 \cos(N_i, z)]^2\, \delta N_i\, dS_1,$$

$$2\pi\varepsilon \int_{S_2} [A_2 \cos(N_i, x) + B_2 \cos(N_i, y) + C_2 \cos(N_i, z)]^2\, \delta N_i\, dS_2,$$

$$\begin{aligned}2\pi\varepsilon \int_{S_{12}} \{ &[A_1 \cos(N_1, x) + B_1 \cos(N_1, y) + C_1 \cos(N_1, z)]^2\\ &- [A_2 \cos(N_2, x) + B_2 \cos(N_2, y) + C_2 \cos(N_2, z)]^2 \}\, \delta N_1\, dS_{12}.\end{aligned}$$

Ces termes, que nous avions omis, fournissent, dans les applications, les termes complémentaires dont l'introduction a été proposée par M. Liénard.

CHAPÎTRE IV.

Équilibre d'un Fluide incompressible, doué de Force coercitive, et polarisé.

C'est seulement dans le cas où un fluide est incompressible que l'on en peut étudier les conditions d'équilibre mécanique sans avoir besoin de le supposer dénué de force coercitive; dans nos *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme* (Livre IX, Chapître VIII), nous avons donné les conditions d'équilibre d'un pareil fluide; ces conditions sont de deux sortes: les unes doivent être vérifiées en tout point intérieur au fluide; les autres, en tout point de la surface qui le limite; les premières conditions, sous la forme que nous leur avions donnée, étaient exactes; les secondes ne l'étaient pas; M. Liénard a indiqué la valeur du terme que nous avions omis.

Nous allons reprendre ici, en nous appuyant sur l'expression de δY établie au Chapître précédent, l'établissement des conditions d'équilibre d'un fluide polarisé; nous espérons rendre ainsi la démonstration de ces conditions irréprochable au point de vue de la rigueur.

Pour ne pas compliquer outre mesure notre analyse, supposons tout d'abord que la partie déformable du système ne soit formée que d'un seul fluide.

Si nous supposons ce fluide incompressible et si nous négligeons les actions capillaires, la partie variable du potentiel thermodynamique interne du système se réduira à la quantité Y; si l'on désigne par D la densité du fluide et si l'on suppose que les forces auxquelles est soumise chaque masse fluide élémentaire admettent une fonction potentielle Ψ, les forces extérieures appliquées au fluide effectueront, dans toute modification virtuelle, un travail

$$d\mathfrak{T}_e = -\int D\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\delta z\right)dv \\ + \mathbf{S}P\left[\cos(P,x)\,\delta x + \cos(P,y)\,\delta y + \cos(P,z)\,\delta z\right]dS, \qquad (1)$$

P désignant la grandeur et la direction de la pression en tout point de l'élément dS, la première intégrale s'étendant au volume entier du fluide, et la seconde à la surface qui le limite.

Nous obtiendrons les conditions d'équilibre du système en écrivant que l'égalité

$$d\mathfrak{T}_e - \delta Y = 0 \qquad (2)$$

est vérifiée pour toute modification virtuelle, compatible avec les liaisons, imposée au système.

Nous ne voulons rien supposer sur les lois d'aimantation du fluide ; il nous faut donc envisager seulement les modifications dans lesquelles chaque élément de volume, en se déplaçant, entraîne son intensité de polarisation ; dès lors, il est aisé de voir que si ω, ω', ω'' désignent les composantes de la rotation élémentaire autour d'axes respectivement parallèles à Ox, Oy, Oz, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \delta A &= B\omega'' - C\omega', \\ \delta B &= C\omega \ \ - A\omega'', \\ \delta C &= A\omega' - B\omega. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Nous savons, d'ailleurs, que

$$\begin{aligned} \omega \ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right), \\ \omega' &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right), \\ \omega'' &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Les égalités (3) peuvent donc s'écrire :

$$\left.\begin{aligned} \delta A &= \tfrac{1}{2}\left[B\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right) - C\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right)\right], \\ \delta B &= \tfrac{1}{2}\left[C\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right) - A\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right)\right], \\ \delta C &= \tfrac{1}{2}\left[A\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right) - B\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

En vertu de ces égalités (4), on a

$$\begin{aligned} &\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\partial A + \frac{\partial V}{\partial y}\partial B + \frac{\partial V}{\partial z}\partial C\right) dv \\ &= \tfrac{1}{2}\int\left\{\frac{\partial V}{\partial x}\left[B\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right) - C\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right)\right]\right. \\ &\qquad + \frac{\partial V}{\partial y}\left[C\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right) - A\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right)\right] \\ &\qquad \left. + \frac{\partial V}{\partial z}\left[A\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right) - B\left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} - \frac{\partial \delta y}{\partial z}\right)\right]\right\} dv. \end{aligned} \tag{5}$$

Transformons cette égalité (5) au moyen d'intégrations par parties.

Imaginons que le déplacement dont les composantes sont δx, δy, δz, varie d'une manière continue d'un point à l'autre du fluide, sauf aux divers points d'une surface fermée Σ tracée à l'intérieur du fluide ; soient:

ν la demi-normale à la surface Σ, dirigée vers l'intérieur de cette surface.

ν' la demi-normale à la surface Σ, dirigée vers l'extérieur de cette surface.

δx, δy, δz, les composantes du déplacement à la face interne de la surface Σ.

$\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$, les composantes du déplacement à la face externe de la surface Σ.

L'égalité précédente peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta A + \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta B + \frac{\partial V}{\partial z}\,\delta C\right) dv \\
&= \tfrac{1}{2}\int\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right]\delta x\right. \\
&\qquad + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right]\delta y \\
&\qquad \left. + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right]\delta z\right\} dv \\
&+ \tfrac{1}{2}\mathrm{S}_S\left\{\left[\left(B\frac{\partial V}{\partial x_i} - A\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\cos(N_i, y) - \left(A\frac{\partial V}{\partial z_i} - C\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\cos(N_i, z)\right]\delta x\right. \\
&\qquad + \left[\left(C\frac{\partial V}{\partial y_i} - B\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)\cos(N_i, z) - \left(B\frac{\partial V}{\partial x_i} - A\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\cos(N_i, x)\right]\delta y \\
&\qquad \left. + \left[\left(A\frac{\partial V}{\partial z_i} - C\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\cos(N_i, x) - \left(C\frac{\partial V}{\partial y_i} - B\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)\cos(N_i, y)\right]\delta z\right\} dS \\
&+ \tfrac{1}{2}\mathrm{S}_\Sigma\left\{\left[\left(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cos(\nu, y) - \left(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\cos(\nu, z)\right](\delta x - \delta' x)\right. \\
&\qquad + \left[\left(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(\nu, z) - \left(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cos(\nu, x)\right](\delta y - \delta' y) \\
&\qquad + \left[\left(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\cos(\nu, x)\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. - \left(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(\nu, y)\right](\delta z - \delta' z)\right\} d\Sigma. \qquad (6)
\end{aligned}$$

L'égalité (35) du Chapître précédent, jointe aux égalités (1) et (6) du présent Chapître, permet d'écrire explicitement la condition d'équilibre (2).

Cette condition (2) ne doit pas avoir lieu quels que soient δx, δy, δz ; ces quantités sont assujetties à deux conditions :

1°. En tout point du fluide, que l'on suppose incompressible, on doit avoir :

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

2°. En tout point de la surface Σ, on doit avoir [Chapître III, condition (36)] :

$$\cos(\nu, x)(\delta x - \delta' x) + \cos(\nu, y)(\delta y - \delta' y) + \cos(\nu, z)(\delta z - \delta' z) = 0. \tag{8}$$

Dès lors, il doit exister :

1°. Une quantité Π, fonction continue d'x, y, z, dans toute l'étendue du fluide ;

2°. Une quantité λ variable d'une manière continue sur la surface Σ ;

telles que l'on ait *identiquement*, quels que soient δx, δy, δz,

$$\begin{aligned} & d\mathfrak{T}_e - \delta Y \\ & + \int \Pi \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right) dv \\ & + \mathop{\mathrm{S}}_{\Sigma} \lambda \left[\cos(\nu, x)(\delta x - \delta' x) + \cos(\nu, y)(\delta y - \delta' y) + \cos(\nu, z)(\delta z - \delta' z) \right] d\Sigma = 0. \end{aligned}$$

Des intégrations par parties permettent de transformer cette identité en

$$\begin{aligned} & d\mathfrak{T}_e - \delta Y \\ & - \int \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \delta z \right) dv \\ & - \mathop{\mathrm{S}}_{S} \Pi \left[\cos(N_i, x) \delta x + \cos(N_i, y) \delta y + \cos(N_i, z) \delta z \right] dS \\ & + \mathop{\mathrm{S}}_{\Sigma} (\lambda - \Pi) \left[\cos(\nu, x)(\delta x - \delta' x) + \cos(\nu, y)(\delta y - \delta' y) \right. \\ & \qquad \left. + \cos(\nu, z)(\delta z - \delta' z) \right] d\Sigma = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

L'égalité (35) du Chapître précédent, jointe aux égalités (1), (6) et (9) du présent Chapître donnent :

$$\int\Big[\Big\{\frac{\partial \Pi}{\partial x} + D\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \varepsilon\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial x}\Big)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial y}\Big(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\Big) - \frac{\partial}{\partial z}\Big(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\Big)\Big]\Big\}\delta x$$

$$+ \Big\{\frac{\partial \Pi}{\partial y} + D\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \varepsilon\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial y}\Big)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial z}\Big(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\Big)\Big]\Big\}\delta y$$

$$+ \Big\{\frac{\partial \Pi}{\partial z} + D\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \varepsilon\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial z}\Big)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\Big)\Big]\Big\}\delta z\Big]dv$$

$$+ \mathrm{S}_\Sigma\Big[\Big\{(\Pi - \lambda)\cos(\nu, x) + \frac{\varepsilon}{2}\Big[\Big(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\Big)\cos(\nu, y)$$

$$- \Big(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\Big)\cos(\nu, z)\Big]\Big\}(\delta x - \delta' x)$$

$$+ \Big\{(\Pi - \lambda)\cos(\nu, y) + \frac{\varepsilon}{2}\Big[\Big(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\Big)\cos(\nu, z)$$

$$- \Big(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\Big)\cos(\nu, x)\Big]\Big\}(\delta y - \delta' y)$$

$$+ \Big\{(\Pi - \lambda)\cos(\nu, z) + \frac{\varepsilon}{2}\Big[\Big(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\Big)\cos(\nu, x)$$

$$- \Big(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\Big)\cos(\nu, y)\Big]\Big\}(\delta z - \delta' z)\Big]d\Sigma$$

$$+ \mathrm{S}_S\Big[\Big\{\Big[\Pi - \varepsilon\Big(A\frac{\partial V}{\partial x_i} + B\frac{\partial V}{\partial y_i} + C\frac{\partial V}{\partial z_i}\Big)$$

$$+ 2\pi\varepsilon\big(A\cos(N_i, x) + B\cos(N_i, y) + C\cos(N_i, z)\big)^2\Big]\cos(N_i, x)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}\Big[\Big(B\frac{\partial V}{\partial x_i} - A\frac{\partial V}{\partial y_i}\Big)\cos(N_i, y) - \Big(A\frac{\partial V}{\partial z_i} - C\frac{\partial V}{\partial x_i}\Big)\cos(N_i, z)\Big]$$

$$- P\cos(P, x)\Big\}\delta x$$

$$+ \Big\{\Big[\Pi - \varepsilon\Big(A\frac{\partial V}{\partial x_i} + B\frac{\partial V}{\partial y_i} + C\frac{\partial V}{\partial z_i}\Big)$$

$$+ 2\pi\varepsilon\big(A\cos(N_i, x) + B\cos(N_i, y) + C\cos(N_i, z)\big)^2\Big]\cos(N_i, y)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}\Big[\Big(C\frac{\partial V}{\partial y_i} - B\frac{\partial V}{\partial z_i}\Big)\cos(N_i, z) - \Big(B\frac{\partial V}{\partial x_i} - A\frac{\partial V}{\partial y_i}\Big)\cos(N_i, x)\Big]$$

$$- P\cos(P, y)\Big\}\delta y$$

$$+ \Big\{\Big[\Pi - \varepsilon\Big(A\frac{\partial V}{\partial x_i} + B\frac{\partial V}{\partial y_i} + C\frac{\partial V}{\partial z_i}\Big)$$

$$+ 2\pi\varepsilon\big(A\cos(N_i, x) + B\cos(N_i, y) + C\cos(N_i, z)\big)^2\Big]\cos(N_i, z)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2}\Big[\Big(A\frac{\partial V}{\partial z_i} - C\frac{\partial V}{\partial x_i}\Big)\cos(N_i, x) - \Big(C\frac{\partial V}{\partial y_i} - B\frac{\partial V}{\partial z_i}\Big)\cos(N_i, y)\Big]$$

$$- P\cos(P, z)\Big\}\delta z\Big]d\Sigma = 0. \qquad (10)$$

Cette égalité doit avoir lieu quels que soient δx, δy, δz; on en conclut sans peine que l'on doit avoir:

1°. En tout point intérieur au fluide:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \Pi}{\partial x} + D\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial x}\right)\\ &\qquad + \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] = 0,\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

et deux autres égalités analogues.

2°. En tout point de la surface qui limite le fluide:

$$\left.\begin{aligned}&\Big[\Pi - \varepsilon\left(A\frac{\partial V}{\partial x_i} + B\frac{\partial V}{\partial y_i} + C\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)\\ &\qquad + 2\pi\varepsilon\left(A\cos(N_i, x) + B\cos(N_i, y) + C\cos(N_i, z)\right)^2\Big]\cos(N_i, x)\\ &+ \frac{\varepsilon}{2}\Big[\left(B\frac{\partial V}{\partial x_i} - A\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)\cos(N_i, y)\\ &\qquad - \left(A\frac{\partial V}{\partial z_i} - C\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)\cos(N_i, z)\Big] = P\cos(P, x),\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

et deux autres égalités analogues.

3°. En tout point de la surface Σ:

$$\left.\begin{aligned}&(\Pi - \lambda)\cos(\nu, x)\\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2}\left[\left(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cos(\nu, y) - \left(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\cos(\nu, z)\right] = 0,\\ &(\Pi - \lambda)\cos(\nu, y)\\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2}\left[\left(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(\nu, z) - \left(B\frac{\partial V}{\partial x} - A\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cos(\nu, x)\right] = 0,\\ &(\Pi - \lambda)\cos(\nu, z)\\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2}\left[\left(A\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\cos(\nu, x) - \left(C\frac{\partial V}{\partial y} - B\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(\nu, y)\right] = 0.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Multiplions la première des égalités (13) par $\cos(\nu, x)$, la seconde par $\cos(\nu, y)$, la troisième par $\cos(\nu, z)$; ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons l'égalité

$$\Pi - \lambda = 0,$$

moyennant laquelle les égalités (13) deviennent:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(B\frac{\partial V}{\partial x}-A\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cos(\nu,y)-\left(A\frac{\partial V}{\partial z}-C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\cos(\nu,z)=0,\\
&\left(C\frac{\partial V}{\partial y}-B\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(\nu,z)-\left(B\frac{\partial V}{\partial x}-A\frac{\partial V}{\partial y}\right)\cos(\nu,x)=0,\\
&\left(A\frac{\partial V}{\partial z}-C\frac{\partial V}{\partial x}\right)\cos(\nu,x)-\left(C\frac{\partial V}{\partial y}-B\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(\nu,y)=0.
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Remarquons maintenant que la surface Σ est entièrement arbitraire; quel que soit le point du fluide que l'on considère et quelle que soit la demi-droite ν issue de ce point, on pourra faire passer la surface Σ par ce point, et cela de telle sorte qu'elle soit normale à la droite ν; les égalités (14) doivent donc être vérifiées en tout point du fluide, et quelle que soit la direction ν; *on doit donc avoir, en tout point du fluide,*

$$\left.\begin{aligned}
&C\frac{\partial V}{\partial y}-B\frac{\partial V}{\partial z}=0,\\
&A\frac{\partial V}{\partial z}-C\frac{\partial V}{\partial x}=0,\\
&B\frac{\partial V}{\partial x}-A\frac{\partial V}{\partial y}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Ces égalités, rapprochées des égalités (11), montrent que *l'on doit aussi avoir, en tout point du fluide:*

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Pi}{\partial x}+D\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial x}\right)=0,\\
&\frac{\partial\Pi}{\partial y}+D\frac{\partial\Psi}{\partial y}-\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial y}\right)=0,\\
&\frac{\partial\Pi}{\partial z}+D\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial z}\right)=0.
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

Les égalités (15), rapprochées des égalités (12), montrent que *l'on doit avoir, en tout point de la surface qui limite le fluide:*

$$\left.\begin{aligned}
P\cos(P,x)=\Big[&\Pi-\varepsilon\left(A\frac{\partial V}{\partial x_i}+B\frac{\partial V}{\partial y_i}+C\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)\\
&+2\pi\varepsilon\left(A\cos(N_i,x)+B\cos(N_i,y)+C\cos(N_i,z)\right)^2\Big]\cos(N_i,x),\\
P\cos(P,y)=\Big[&\Pi-\varepsilon\left(A\frac{\partial V}{\partial x_i}+B\frac{\partial V}{\partial y_i}+C\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)\\
&+2\pi\varepsilon\left(A\cos(N_i,x)+B\cos(N_i,y)+C\cos(N_i,z)\right)^2\Big]\cos(N_i,y),\\
P\cos(P,z)=\Big[&\Pi-\varepsilon\left(A\frac{\partial V}{\partial x_i}+B\frac{\partial V}{\partial y_i}+C\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)\\
&+2\pi\varepsilon\left(A\cos(N_i,x)+B\cos(N_i,y)+C\cos(N_i,z)\right)^2\Big]\cos(N_i,z).
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Les égalités (15), (16), (17) représentent les *conditions d'équilibre mécanique d'un fluide incompressible polarisé, doué ou non de force coercitive.*

Interprétons ces conditions.

Les égalités (17) nous apprennent que, pour maintenir le fluide en équilibre, il faut appliquer en chaque point de la surface qui le termine, une pression *normale* à cette surface; la grandeur de cette pression, positive pour une pression dirigée vers l'intérieur du fluide, est représentée par l'égalité:

$$P = \Pi - \varepsilon\left(\mathrm{A}\frac{\partial V}{\partial x_i} + \mathrm{B}\frac{\partial V}{\partial y_i} + \mathrm{C}\frac{\partial V}{\partial z_i}\right) + 2\pi\varepsilon\left(\mathrm{A}\cos(N_i, x) + \mathrm{B}\cos(N_i, y) + \mathrm{C}\cos(N_i, z)\right)^2. \quad (18)$$

On voit que *la grandeur de cette pression dépend de l'orientation de l'élément sur lequel elle agit;* ce résultat remarquable est dû à M. Liénard; le terme

$$2\pi\varepsilon\left(\mathrm{A}\cos(N_i, x) + \mathrm{B}\cos(N_i, y) + \mathrm{C}\cos(N_i, z)\right)^2 = 2\pi\varepsilon\,\mathrm{M}^2\cos^2(\mathrm{M}, N_i)$$

avait été omis dans l'expression de P qui est donnée dans nos *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme.*

En vertu des égalités (12), il doit exister une fonction $\theta(x, y, z)$ telle que l'on ait, en tout point du fluide,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A} &= -\varepsilon\theta\frac{\partial V}{\partial x}, \\ \mathrm{B} &= -\varepsilon\theta\frac{\partial V}{\partial y}, \\ \mathrm{C} &= -\varepsilon\theta\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Si le fluide considéré est homogène, cas auquel D est indépendant d'x, y, z, les égalités (16) donnent, moyennant les égalités (19),

$$d(\Pi + D\Psi) + \frac{1}{\theta}(\mathrm{A}d\mathrm{A} + \mathrm{B}d\mathrm{B} + \mathrm{C}d\mathrm{C}) = 0,$$

ou bien, à cause de l'égalité

$$\mathrm{A}d\mathrm{A} + \mathrm{B}d\mathrm{B} + \mathrm{C}d\mathrm{C} = \mathrm{M}d\mathrm{M},$$

$$d(\Pi + D\Psi) + \frac{\mathrm{M}}{\theta}d\mathrm{M} = 0.$$

La quantité $\frac{\mathrm{M}}{\theta}dM$ ne pourrait être une différentielle totale, si θ dépendait

de x, y, z, autrement que par l'intermédiaire de la variable M. Il existe donc une fonction $\Theta(M)$ telle que l'on ait, en chaque point du fluide

$$\theta(x, y, z) = \Theta(M),$$

en sorte que les égalités (19) peuvent s'écrire:

$$\left.\begin{aligned} A &= -\varepsilon\Theta(M)\frac{\partial V}{\partial x}, \\ B &= -\varepsilon\Theta(M)\frac{\partial V}{\partial y}, \\ C &= -\varepsilon\Theta(M)\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Ainsi, *lorsqu'un fluide, même doué de force coercitive, est en équilibre, la polarisation y est distribuée comme elle le serait sur un fluide parfaitement doux, de même forme, dont le coefficient de polarisation serait une fonction, convenablement choisie, de l'intensité de polarisation*; *le choix de cette fonction* $\Theta(M)$ *ne dépend pas seulement de la nature du fluide étudié; il peut dépendre de la suite des modifications qui ont amené le fluide à l'état d'équilibre.*

C'est le résultat fondamental que nous avions obtenu, dans nos *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme*, par une analyse moins générale et moins rigoureuse.

Tout ce qui précède suppose le système réduit à un fluide unique.

Imaginons maintenant qu'il soit formé de deux fluides en contact, 1 et 2. Pour chacun de ces deux fluides, on aura à écrire des égalités analogues aux égalités (15), (16) et (17), en affectant les quantités qui y figurent de l'indice 1 pour le premier fluide et de l'indice 2 pour le second; en outre, nous devrons avoir, en tout point de la surface de contact S_{12} des deux fluides:

$$\begin{aligned} \Pi_1 - \Pi_2 = \varepsilon \Big[\Big(A_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + B_1\frac{\partial V}{\partial y_1} + C_1\frac{\partial V}{\partial z_1}\Big) - \Big(A_2\frac{\partial V}{\partial x_2} + B_2\frac{\partial V}{\partial y_2} + C_2\frac{\partial V}{\partial z_2}\Big)\Big] \\ - 2\pi\varepsilon\,\big[(A_1\cos(N_1, x) + B_1\cos(N_1, y) + C_1\cos(N_1, z))^2 \\ - (A_2\cos(N_2, x) + B_2\cos(N_2, y) + C_2\cos(N_2, z))^2\big]. \end{aligned}$$

L'établissement de cette condition ne présente aucune difficulté.

CHAPÎTRE V.

Les Fluides parfaitement doux.

Prenons un système formé de deux fluides, 1 et 2, dénués de force coercitive et compressibles. Si nous négligeons les actions capillaires, le Potentiel Thermodynamique Interne de ce système pourra se mettre sous la forme

$$F = \int_1 \phi_1(D_1)\, dv_1 + \int_2 \phi_2(D_2)\, dv_2 + Y + \int_1 F_1(M_1, D_1)\, dv_1 + \int_2 F_2(M_2, D_2)\, dv_2. \quad (1)$$

Quant au travail virtuel $d\mathfrak{T}_e$ des forces extérieures, il sera donné comme au chapître précédent, par l'expression

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T}_e = &-\int_1 D_1 \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\delta z\right) dv_1 \\ &-\int_2 D_2 \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\delta z\right) dv_2 \\ &+\mathrm{S}_{S_1} P\,[\cos(P,x)\,\delta x + \cos(P,y)\,\delta y + \cos(P,z)\,\delta z]\, dS_1 \\ &+\mathrm{S}_{S_2} P\,[\cos(P,x)\,\delta x + \cos(P,y)\,\delta y + \cos(P,z)\,\delta z]\, dS_2. \quad (2) \end{aligned}$$

Les conditions d'équilibre du système s'obtiendront en exprimant que l'égalité

$$d\mathfrak{T}_e - \delta F = 0 \quad (3)$$

est vérifiée pour toutes les modifications virtuelles du système.

Il nous est loisible de considérer d'abord les seules modifications dans lesquelles chaque élément matériel garde un volume invariable et entraîne avec lui sa polarisation ; l'égalité (3), appliquée à de semblables modifications, donne les égalités (15), (16), (17), et (21) du Chapître précédent à titre de *conditions nécessaires, mais non suffisantes, de l'équilibre.*

Ecrivons maintenant l'expression générale de $d\mathfrak{T}_e - \delta F$.

Nous avons

$$\left.\begin{aligned} \delta D_1 &= -D_1\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right), \\ \delta D_2 &= -D_2\left(\frac{\partial\delta x}{\partial y}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right), \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta \mathrm{M}_1 &= \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{M}_1}\,\delta\mathrm{A}_1 + \frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{M}_1}\,\delta\mathrm{B}_1 + \frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{M}_1}\,\delta\mathrm{C}_1, \\ \delta \mathrm{M}_2 &= \frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{M}_2}\,\delta\mathrm{A}_2 + \frac{\mathrm{B}_2}{\mathrm{M}_2}\,\delta\mathrm{B}_2 + \frac{\mathrm{C}_2}{\mathrm{M}_2}\,\delta\mathrm{C}_2. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Si donc nous définissons les deux fonctions $f_1(\mathrm{M}_1, D_1)$, $f_2(\mathrm{M}_2, D_2)$ par les égalités

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{f_1(\mathrm{M}_1, D_1)} &= \frac{1}{\mathrm{M}_1}\,\frac{\partial \mathrm{F}_1(\mathrm{M}_1, D_1)}{\partial D_1}, \\ \frac{1}{f_2(\mathrm{M}_2, D_2)} &= \frac{1}{\mathrm{M}_2}\,\frac{\partial \mathrm{F}_2(\mathrm{M}_2, D_2)}{\partial D_2}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

nous aurons, en général,

$$\begin{aligned} \delta\mathrm{F} = \delta Y &+ \int_1 \frac{1}{f_1(\mathrm{M}_1, D_1)}(\mathrm{A}_1\delta\mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_1\delta\mathrm{B}_1 + \mathrm{C}_1\delta\mathrm{C}_1)\,dv_1 \\ &+ \int_2 \frac{1}{f_2(\mathrm{M}_2, D_2)}(\mathrm{A}_2\delta\mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_2\delta\mathrm{B}_2 + \mathrm{C}_2\delta\mathrm{C}_2)\,dv_2 \\ &+ \int_1 \left[\phi_1(D_1) - D_1\frac{d\phi_1(D_1)}{dD_1} + f_1(\mathrm{M}_1, D_1) - D_1\frac{\partial f_1(\mathrm{M}_1, D_1)}{\partial D_1}\right] \\ &\qquad \times\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)dv_1 \\ &+ \int_2 \left[\phi_2(D_2) - D_2\frac{d\phi_2(D_2)}{dD_2} + f_2(\mathrm{M}_2, D_2) - D_2\frac{\partial f_2(\mathrm{M}_2, D_2)}{\partial D_2}\right] \\ &\qquad \times\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)dv_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Observons que l'on a identiquement

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}_1(\mathrm{B}_1\omega'' - \mathrm{C}_1\omega') + \mathrm{B}_1(\mathrm{C}_1\omega - \mathrm{A}_1\omega'') + \mathrm{C}_1(\mathrm{A}_1\omega' - \mathrm{B}_1\omega) = 0, \\ \mathrm{A}_2(\mathrm{B}_2\omega'' - \mathrm{C}_2\omega') + \mathrm{B}_2(\mathrm{C}_2\omega - \mathrm{A}_2\omega'') + \mathrm{C}_2(\mathrm{A}_2\omega'' - \mathrm{B}_2\omega) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

et nous verrons sans peine que les égalités (35) du Chapitre III, (2) et (7) du présent Chapitre, permettent d'écrire l'égalité (3) sous la forme :

$$\int_1 \Big\{ \Big[\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{A_1}{f_1(M_1, D_1)}\Big] \Delta A_1 + \Big[\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{B_1}{f_1(M_1, D_1)}\Big] \Delta B_1$$

$$+ \Big[\varepsilon \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{C_1}{f_1(M_1, D_1)}\Big] \Delta C_1 \Big\} dv_1$$

$$+ \int_1 \Big[\phi_1(D_1) - D_1 \frac{d\phi_1(D_1)}{dD_1} + f_1(M_1, D_1) - D_1 \frac{\partial f_1(M_1, D_1)}{\partial D_1}\Big]$$

$$\times \Big(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\Big) dv_1$$

$+$ etc.

$$+ \varepsilon \int_1 \Big[\frac{\partial V}{\partial x}(B_1\omega'' - C_1\omega') + \frac{\partial V}{\partial y}(C_1\omega - A_1\omega'') + \frac{\partial V}{\partial z}(A_1\omega' - B_1\omega)\Big] dv_1$$

$$+ \int_1 \Big\{ \Big[D_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \varepsilon \Big(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C_1}{\partial x}\Big)\Big] \delta x$$

$$+ \Big[D_1 \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \varepsilon \Big(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C_1}{\partial y}\Big)\Big] \delta y$$

$$+ \Big[D_1 \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \varepsilon \Big(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B_1}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C_1}{\partial z}\Big)\Big] \delta z \Big\} dv_1$$

$$+ \mathbf{S}_{S_1} \Big\{ \Big[2\pi\varepsilon\,(A_1 \cos(N_i, x) + B_1 \cos(N_i, y) + C_1 \cos(N_i, z))^2$$

$$- \varepsilon \Big(A_1 \frac{\partial V}{\partial x_i} + B_1 \frac{\partial V}{\partial y_i} + C_1 \frac{\partial V}{\partial z_i}\Big)\Big] \delta N_i$$

$$- P[\cos(P, x)\,\delta x + \cos(P, y)\,\delta y + \cos(P, z)\,\delta z] \Big\} dS_1$$

$+$ etc.

$$+ \mathbf{S}_{S_{12}} \Big[2\pi\varepsilon\,(A_1 \cos(N_1, x) + B_1 \cos(N_1, y) + C_1 \cos(N_1, z))^2$$

$$- 2\pi\varepsilon\,(A_2 \cos(N_2, x) + B_2 \cos(N_2, y) + C_2 \cos(N_2, z))^2$$

$$- \varepsilon \Big(A_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + B_1 \frac{\partial V}{\partial y_1} + C_1 \frac{\partial V}{\partial z_1} - A_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} - B_2 \frac{\partial V}{\partial y_2} - C_2 \frac{\partial V}{\partial z_2}\Big)\Big] \delta N_1\, dS_{12}. \qquad (9)$$

Dans cette égalité, on a posé, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} \Delta A &= \delta A - (B\omega'' - C\omega'), \\ \Delta B &= \delta B - (C\omega - A\omega''), \\ \Delta C &= \delta C - (A\omega' - B\omega). \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

L'égalité (9) est générale; supposons maintenant vérifiées les égalités (15), (16), (17) et (21) du Chapître précédent, que nous savons être nécessaires pour

l'équilibre du système ; il est aisé de voir que ces égalités expriment simplement que l'on a *identiquement*

$$\varepsilon\int_1 \left[\frac{\partial V}{\partial x}(B_1\omega'' - C_1\omega') + \frac{\partial V}{\partial y}(C_1\omega - A_1\omega'') + \frac{\partial V}{\partial z}(A_1\omega' - B_1\omega)\right] dv_1$$

$$+\int_1 \Big\{\left[D_1\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C_1}{\partial x}\right)\right]\delta x$$

$$+\left[D_1\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C_1}{\partial y}\right)\right]\delta y$$

$$+\left[D_1\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial B_1}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial C_1}{\partial z}\right)\right]\delta z\Big\} dv_1$$

$$+\mathbf{S}_{s_1}\Big\{\Big[2\pi\varepsilon\left(A_1\cos(N_i, x) + B_1\cos(N_i, y) + C_1\cos(N_i, z)\right)^2$$

$$-\varepsilon\left(A_1\frac{\partial V}{\partial x_i} + B_1\frac{\partial V}{\partial y_i} + C_1\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)\Big]\delta N_i$$

$$-P\left[\cos(P, x)\,\delta x + \cos(P, y)\,\delta y + \cos(P, z)\,\delta z\right]\Big\} dS_1$$

$$+ \text{etc.}$$

$$+\mathbf{S}_{s_{12}}\Big[2\pi\varepsilon\left(A_1\cos(N_1, x) + B_1\cos(N_1, y) + C_1\cos(N_1, z)\right)^2$$

$$-2\pi\varepsilon\left(A_2\cos(N_2, x) + B_2\cos(N_2, y) + C_2\cos(N_2, z)\right)^2$$

$$-\varepsilon\left(A_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + B_1\frac{\partial V}{\partial y_1} + C_1\frac{\partial V}{\partial z_1} - A_2\frac{\partial V}{\partial x_2} - B_2\frac{\partial V}{\partial y_2} - C_2\frac{\partial V}{\partial z_2}\right)\Big]\delta N_1\, dS_{12}$$

$$=\int_1 \Pi_1\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right) dv_1$$

$$+\int_2 \Pi_2\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right) dv_2.$$

Lors donc que les égalités (15), (16), (17) et (21) du Chapître précédent sont supposées vérifiées, l'égalité (9) peut s'écrire :

$$\int_1 \Big\{\left[\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{A_1}{f_1(M_1, D_1)}\right]\Delta A_1 + \left[\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{B_1}{f_1(M_1, D_1)}\right]\Delta B_1$$

$$+\left[\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{C_1}{f_1(M_1, D_1)}\right]\Delta C_1\Big\} dv_1$$

$$+\int_1 \Big[\phi_1(D_1) - D_1\frac{d\phi_1(D_1)}{dD_1}$$

$$+ f_1(M_1, D_1) - D_1\frac{\partial f_1(M_1, D_1)}{\partial D_1} + \Pi_1\Big]\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right) dv_1$$

$$+ \text{etc.} = 0. \tag{11}$$

Il est évident que la dilatation cubique $\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right)$ a une valeur arbitraire en tout point des fluides 1 et 2. δA_1, δB_1, δC_1, ayant des valeurs arbitraires, il en est de même, en vertu des égalités (10) de ΔA_1, ΔB_1, ΔC_1. Donc, pour que l'égalité (11) ait lieu, il faut et il suffit :

1°. Que l'on ait, *en tout point du fluide* 1,

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\,\varepsilon f_1(M_1, D_1)\frac{\partial V}{\partial x}, \\ B_1 &= -\,\varepsilon f_1(M_1, D_1)\frac{\partial V}{\partial y}, \\ C_1 &= -\,\varepsilon f_1(M_1, D_1)\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

et, *en tout point du fluide* 2,

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= -\,\varepsilon f_2(M_2, D_2)\frac{\partial V}{\partial x}, \\ B_2 &= -\,\varepsilon f_2(M_2, D_2)\frac{\partial V}{\partial y}, \\ C_2 &= -\,\varepsilon f_2(M_2, D_2)\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{12 bis}$$

2°. Que l'on ait, *en tout point du fluide* 1,

$$\Phi_1(D_1) - D_1\frac{d\Phi_1(D_1)}{dD_1} + f_1(M_1, D_1) - D_1\frac{\partial f_1(M_1, D_1)}{\partial D_1} + \Pi_1 = 0, \tag{13}$$

et, *en tout point du fluide* 2,

$$\Phi_2(D_2) - D_2\frac{d\Phi_2(D_2)}{dD_2} + f_2(M_2, D_2) - D_2\frac{\partial f_2(M_2, D_2)}{\partial D_2} + \Pi_2 = 0. \tag{13 bis}$$

Si l'on observe que les conditions (12) et (12 bis) entraînent les égalités (15) du Chapître précédent, on voit que *les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un système de fluides compressibles et dénués de force coercitive, sont données par les égalités* (12), (12 bis), (13), (13 bis) *du présent Chapître, jointes aux égalités* (16), (17) *et* (21) *du Chapître précédent.*

Les égalités (12) et (12 bis) ont joué un rôle fondamental dans toutes nos études sur les corps magnétiques ou diélectriques; quant aux égalités (13) et (13 bis), nous avons signalé leur importance dans nos *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme.*